Theoretische Physik

Zur Vorbereitung der Vordiplomsprüfung

Hanno Rein
http://hanno-rein.de

6. April 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Newton'sche Mechanik

1.1 Koordinatensysteme

Die Einheitsvektoren (normiert) sind:

$$\hat{e}_{q_i} = \frac{\partial \vec{r}(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_i} \cdot \left| \frac{\partial \vec{r}(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_i} \right|^{-1}$$

Geschwindigkeit in beliebigen Koordinaten

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt}$$

Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = r\hat{e}_r = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

1.2 Newton'sche Axiome

1. Alle Körper verharren im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn keine äußeren Einflüsse vorhanden sind.
2. $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
3. $\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$ (actio = reactio)

Das Inertialsystem ruht oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit (keine Rotation oder Beschleunigung). Im Intertialsystem gilt das Trägheitsgesetzt, als sei es der ruhende Mittelpunkt der Welt.

1.3 Konservative Kraftfelder

Kraftfeld $\vec{F}$ ist konservativ (Energieerhaltung ist gültig), wenn es sich folgendermaßen schreiben lässt

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}).$$

Es ist (Beweis mit Hilfe linearer Näherung von V)

$$dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r}.$$

Wegintegral über Potential $V(\vec{r})$ ist wegunabhängig. Beweis:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{\nabla}V(\vec{r})\, d\vec{r}$$
$$= -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dV \quad = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

Es gilt Drehimpulserhaltung:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{l}}{dt} &= m\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v}) = m\left[(\vec{v}\times\vec{v}) + (\vec{r}\times\vec{a})\right] \\ &= \underbrace{\vec{r}\times\vec{F}}_{\text{Drehmoment}} = f(\vec{r})\,(\vec{r}\times\vec{r}) = 0\end{aligned}$$

Zentrales konservatives Kraftfeld $\vec{F}$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)\,\vec{r}$$

1.4 Phasenraum

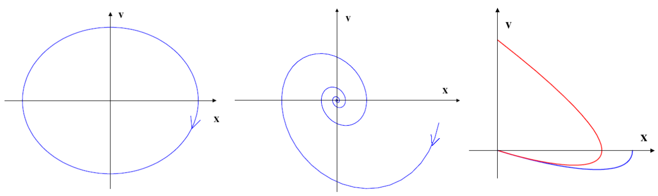

Abbildung 1: Trajektorien im Phasenraum für ungedämpften, schwach und stark gedämpften harmonischen Oszillator

1.5 Keplersche Gesetze

1. Die Planeten durchlaufen Ellipsenbahnen. Ellipsenbahn:

$$\rho = \frac{P}{1-\epsilon\cos\phi} \qquad P = \frac{b^2}{a} \qquad \epsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

2. Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten dt gleiche Flächen dF (Impulserhaltung). Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right| = \frac{1}{2m}\left|\vec{r}\times m\vec{v}\right| \\ &= \frac{1}{2m}|\vec{l}| = const = \frac{\pi ab}{T}.\end{aligned}$$

3. Mit der großen Halbachse a und der Umlaufzeit T gilt für alle Planeten $\frac{a^3}{T^2} = const$. Beweis:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a\vec{l}^2}{4m^2\pi^2b^2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\vec{l}^2}{m^2P}$$

Die Radialbeschleunigung lässt sich berechnen zu

$$\begin{aligned}a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 \\ &= -\frac{\vec{l}^2}{m^2P}\frac{1}{\rho^2}\end{aligned}$$

Das Gravitationsgesetz sagt nun, dass der erste Faktor konstant ist. Dies entspricht aber auch genau dem Faktor in der Gleichung von $\frac{a^3}{T^2}$.

Aus der Bewegungsgleichung folgt durch Multiplikation mit $\vec{l}$:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{p}} &= -\alpha\frac{\vec{r}}{r^3} \\ \dot{\vec{p}}\times\vec{l} &= \frac{\alpha}{r^3}\left(r^2\vec{p} - \vec{r}(\vec{r}\vec{p})\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\vec{p}\times\vec{l}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\alpha m\frac{\vec{r}}{r}\right) \\ \vec{p}\times\vec{l} &= \alpha m\frac{\vec{r}}{r} - \vec{C}\end{aligned}$$

$\vec{C}$ ist Lenz'scher Vektor und liegt in der Bewegungsebene und ist parallel zum Ortsvektor des Perihels. Durch skalare Multiplikation mit $\vec{r}$ ergibt sich die Ellipsengleichung:

$$\begin{aligned}\vec{r}(\vec{p}\times\vec{l}) &= \alpha m\frac{\vec{r}^2}{r} - \vec{r}\vec{C} \\ \underbrace{\vec{l}(\vec{r}\times\vec{p})}_{=l^2} &= \alpha mr - rC\cos\phi \\ r &= \frac{l^2/(\alpha m)}{1-C/(\alpha m)\cos\phi}\end{aligned}$$

1.6 Vielteilchensysteme

Die reduzierte Masse ist

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.$$

Bei einem elastischen Stoß gleicher Massen gilt die Impuls- und Energieerhaltung:

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \\ \frac{\vec{p}_1^2}{2m} &= \frac{\vec{p}_1'^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2'^2}{2m}\end{aligned}$$

Durch Quadrieren der Impulserhaltung folgt

$$\begin{aligned}\vec{p}_1^2 &= \vec{p}_1'^2 + \vec{p}_2'^2 + 2\vec{p}_1'\vec{p}_2' \\ 0 &= 2\vec{p}_1'\vec{p}_2' = p_1'p_2'\cos\phi\end{aligned}$$

Handelt es sich nicht um einen zentralen Stoß, ist somit $\phi = 90°$.

1.7 Virialsatz

Befinden sich alle Teilchen in einem endlichen Volumen, so gibt der Virialsatz die mittlere kinetische Energie der Teilchen an:

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_i \vec{F}_i\vec{r}_i}$$

Beweis: Berechne Ableitung von $G = \sum_i \vec{p}_i\vec{r}_i$

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= \sum_i\left(\vec{F}\vec{r}_i + m\dot{\vec{r}}_i^2\right) \\ &= 2T + \sum_i \vec{F}_i\vec{r}_i\end{aligned}$$

Der absolute zeitliche Mittelwert ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned}\overline{\frac{dG}{dt}} &= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dG}{dt}dt \\ &= \sum_i \vec{p}_i\vec{r}_i\Big|_0^\tau = 0 = \overline{2T + \sum_i \vec{F}_i\vec{r}_i}\end{aligned}$$

2 Rotationen

2.1 Orthogonale Transformationen

Koordinatentransformation ist orthogonal wenn

$$D \cdot D^T = 1 \quad \text{und} \quad \det D = 1.$$

Drehmatrix um z-Achse:

$$R^z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine beliebige Rotation wird beschrieben durch drei Eulerwinkel:

$$R^{\text{Euler}}(\alpha,\beta,\gamma) = R^z(\gamma)\, R^x(\beta)\, R^z(\alpha)$$

2.2 Zeitableitung im rotierenden Koordinatensystem

$$\left\{\frac{d\vec{f}}{dt}\right\}_{\text{Lab}} = \left\{\frac{d\vec{f}}{dt}\right\}_{\text{RK}} + \vec{\omega} \times \vec{f}$$

Beweis: Den um den Winkel ωt transformierten Vektor im RK ableiten und Summanden identifizieren.

2.3 Scheinkräfte

Die Beschleunigung im Laborsystem errechnet sich durch 2-maliges Anwenden und Ausmultiplizieren der obigen Gleichung zu:

$$\vec{a}_{\text{Lab}} = \vec{a}_{\text{RK}} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}_{1.} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}}_{2.} + \underbrace{\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]}_{3.}$$

1. Lineare Beschleunigung
2. Coriolisbeschleunigung
3. Zentrifugalbeschleunigung

3 Starre Körper

3.1 Trägheitstensor

Der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ ist die Summe der einzelnen Drehimpulse:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \sum_i m_i[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)]$$

$$= \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i) \\ z_i(\omega_y z_i - \omega_z y_i) - x_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) \\ x_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i) - y_i(\omega_y z_i - \omega_z y_i) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \cdot \vec{\omega} = I\, \vec{\omega}$$

Transformation des Drehimpulses:

$$\begin{aligned} \vec{L}' &= R\vec{L} = RI\vec{\omega} \\ &= \underbrace{R\, I\, R^{-1}}_{=I'}\, \underbrace{R\,\vec{\omega}}_{=\vec{\omega}'} \end{aligned}$$

Der Trägheitstensor ist also ein Tensor zweiter Stufe. Der Vektor $\vec{\omega}$ ist ein Tensor erster Stufe.

Bei einer Hauptträgheitsachse ist $\vec{L} \,||\, \vec{\omega}$. Zur Bestimmung der Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente ist folgendes Eigenwertproblem zu lösen:

$$\det(I - \lambda \cdot \hat{1}) = 0$$

Für eine beliebige Drehachse errechnet sich das Trägheitsmoment zu

$$I_\omega = \hat{e}_\omega(I\hat{e}_\omega) = \sum_i m_i(\vec{r}_i^2 - (\vec{r}_i\hat{e}_\omega)^2)$$

Die Berechnung eines Trägheitsmoments eines Körpers mit kontinuierlicher Massenverteilung erfolgt mit Hilfe eines Volumenintegrals. Der Integrand ist dann

$$\text{Volumenelement} \cdot \text{Dichte} \cdot (\text{Abstand zu } \vec{\omega})^2$$

3.2 Satz von Steiner

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers mit Masse M um die Drehachse $\hat{e}_\omega$ (mit Anstand b zum Schwerpunkt) ist

$$I_\omega = I_\omega^{\text{Schwerpunkt}} + Mb^2.$$

Beweis: Sei $\vec{\rho}_\alpha$ der Ortsvektor eines Massenpunktes im Schwerpunktsystem, und $\vec{r}_\alpha$ der Ortsvektor im um den Vektor $-\vec{R}$ verschobenen Koordinatensystem (also $\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{\rho}_\alpha$), so gilt:

$$\begin{aligned} I_\omega &= \sum_\alpha m_\alpha(\vec{r}_\alpha^2 - (\vec{r}_\alpha\hat{e}_\omega)^2) \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \left[R^2 + 2\vec{R}\vec{\rho}_\alpha + \vec{\rho}_\alpha^2 + \ldots\right] \\ &= M\vec{R}^2 + \sum_\alpha m_\alpha(\vec{\rho}_\alpha^2 - (\vec{\rho}_\alpha\hat{e}_\omega)^2) = M\vec{R}^2 + I_\omega^{\text{SP}} \end{aligned}$$

3.3 Kinetische Energie

Die kinetische Energie des gesamten starren Körpers ist:

$$\begin{aligned} T_{\text{Kin}} &= \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}\left(\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt}\right)^2 \\ &= \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}\left(\frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_\alpha}{dt}\right)^2 \\ &= \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}\left(\frac{d\vec{R}}{dt} + \cancel{\left\{\frac{d\vec{\rho}_\alpha}{dt}\right\}_{\text{RK}}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\alpha\right)^2 \\ &= \frac{M_\alpha}{2}\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)^2 + \frac{d\vec{R}}{dt}\left(\omega \times \sum_\alpha m_\alpha\vec{\rho}_\alpha\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\alpha)^2 \end{aligned}$$

4 Lagrange Formalismus

4.1 Zwangsbedingungen

Holonome Zwangbedingung:

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$$

Nicht holonome Zwangsbedingung:

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) > 0$$

Eine skeleronome Zwangsbedingung ist zeitunabhängig, eine rheonome zeitabhängig.

4.2 Virtuelle Verrückungen

Die virtuelle Verrückung ist eine infinitesimale Veränderung des Systems, die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist.

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha$$

Damit die Zwangsbedingungen erfüllt bleiben muss für alle $l = 1 \dots k$ gelten

$$f_l(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = f_l(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N, t) = 0.$$

Die Entwicklung an der Stelle $\vec{r}_i + \delta\vec{r}_i$ um den Punkt $\vec{r}_i$ ergibt

$$\begin{aligned} & f_l(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N, t) \\ = \; & f_l(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i} \delta\vec{r}_i. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Bestimmungsgleichung für die erlaubten virtuellen Verrückungen

$$\sum_{i=0}^{N} \vec{\nabla}_i f_l \delta\vec{r}_i = 0 \qquad l = 1 \dots k$$

4.3 D'Alembertsches Prinzip

Die zeitliche Entwicklung des Systems erfolgt in Richtung solcher virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_i$, für die die Zwangskräfte keine Arbeit leisten:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{Zwang}} \delta\vec{r}_i = 0$$

Das D'Alembertsche Prinzip ist ein Postulat.

4.4 Lagrange Bewegungsgleichungen 1. Art

Das D'Alembertsche Prinzip ist eine Linearkombination der Bestimmunsgleichung der virtueller Verrückungen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{Zwang}} \delta\vec{r}_i &= \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i f_l \delta\vec{r}_i \\ \vec{F}_i^{\text{Zwang}} &= \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \vec{\nabla}_i f_l \qquad i = 1..N \end{aligned}$$

Die Zwangskräfte sind so konstruiert, dass sich das Teilchen bewegt, als ob eine Gesamtkraft

$$\vec{F}_i^{\text{Gesamt}} = \vec{F}_i + \vec{F}_i^{\text{Zwang}}$$

auf es wirkt. Die Lagrange Bewegungsgleichungen 1. Art sind somit

$$\begin{aligned} m_i \vec{a}_i &= \vec{F}_i + \underbrace{\sum_{l=1}^{k} \lambda_l \vec{\nabla}_i f_l(\vec{r}_i, t)}_{\vec{F}_i^{\text{Zwang}}} \\ f_l(\vec{r}_i, t) &= 0. \end{aligned}$$

4.5 Lagrange Bewegungsgleichungen 2. Art

Die Geschwindigkeit eines Teilchens berechnet sich zu

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Multipliziert man alle Lagrange Bewegungsgleichungen 1. Art mit der zugehörigen virtuellen Verrückung und addiert diese, so ist

$$\sum_{i}^{N} m_i \vec{a}_i \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta\vec{r}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{Zwang}} \delta\vec{r}_i}_{=0 \text{ D'Alembert}}$$

Setzt man die Definition der virtuellen Verrückungen ein, so erhällt man

$$\begin{aligned} & \sum_{i,\alpha} m_i \vec{a}_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right) = \sum_{i,\alpha} \vec{F}_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right) \\ = & \sum_{i,\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right\} \delta q_\alpha \end{aligned}$$

Als Nebenrechnungen ist zu zeigen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left\{ \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{\vec{r}}_i \end{aligned}$$

sowie

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\partial \frac{dq_j}{dt}} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Setzt man dies oben ein, so ergibt sich mit der kinetischen Energie $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$:

$$\sum_{i,\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right\} \delta q_\alpha$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \right\} \delta q_\alpha \\
&= \sum_{i,\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \right) \right\} \delta q_\alpha \\
&= \sum_{\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} T - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} T \right\} \delta q_\alpha
\end{aligned}
$$

Da die virtuellen Verrückungen beliebig sind, gilt die Gleichung auch für jede generalisierte Koordinate α einzeln:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} T - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} T = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$$

Hierbei ist Q_α die generalisierte Kraft, für die sich im Falle eines konservativen Kraftfeldes mit dem Potential V ergibt

$$Q_\alpha = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}.$$

Lässt man in einem transformierten Koordinatensystem alle bis auf eine Koordinate q_β fix, so beschreibt $\vec{x}_i(q_1, \ldots, q_\beta, \ldots)$ eine Raumkurve, wobei $\partial \vec{x}_i / \partial q_\beta$ der Tangentenvektor an diese Kurve ist. Das innere Produkt der Kraft mit diesem Tangentenvektor ergibt die Projektion der Kraft, die generalisierte Kraft.

Erweitert man das Konzept der Potenzialfunktion V, indem man die Geschwindigkeitsabhängigkeit zulässt, so ergibt sich die generalisierte Kraft zu:

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

Setzt man $L = T - V$ so lässt sich die Lagrange Bewegungsgleichung zweiter Art aufstellen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

4.6 Geschwindigkeitsabhängige Kräfte

Ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld erfährt das verallgemeinerte Potenzial

$$M = e\Phi - e\vec{v}\vec{A}$$

Die Lagrangefunktion ist somit

$$L = T - M = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - e\Phi + e\vec{v}\vec{A}$$

Die relativistische Betrachtung liefert

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\Phi + e\vec{v}\vec{A}$$

4.7 Hamiltonsches Prinzip

Die Bewegungsgleichung für ein Teilchen i, auf das die Kraft $\vec{F}_i$ und die Zwangskraft $\vec{F}_i^{\text{Zwang}}$ wirkt lautet

$$0 = \vec{F}_i + \vec{F}_i^{\text{Zwang}} - m_i \vec{a}_i$$

Summiert über alle Teilchen und multipliziert mit der virtuellen Verrückung $\delta \vec{r}_i$ gilt

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_i \left(\vec{F}_i + \vec{F}_i^{\text{Zwang}} - m_i \vec{a}_i \right) \delta \vec{r}_i \\
&= \sum_i \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i \right) \delta \vec{r}_i
\end{aligned}
$$

Integriert man über die Zeit, wendet zweimal partielle Integration an und setzt die viertuellen Verrückungen zum Anfangs und Endzeitpunkt gleich null, so ist

$$
\begin{aligned}
0 &= \int dt \, \sum_i \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i \right) \delta \vec{r}_i \\
&= -\int dt \, \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \right) \delta \vec{r}_i \\
&\quad + \int dt \, \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) \delta \vec{r}_i - \int dt \, \sum_i m_i \vec{a}_i \delta \vec{r}_i \\
&= \underbrace{-\int dt \, \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \right) \delta \vec{r}_i - \int dt \, \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) \delta \dot{\vec{r}}_i}_{=-\delta \int dt \, V} \\
&\quad - \int dt \, \sum_i m_i \vec{a}_i \delta \vec{r}_i \\
&= -\delta \int dt \, V + \int dt \, \sum_i m_i \vec{v}_i \delta \dot{\vec{r}}_i \\
&= -\delta \int dt \, V + \int dt \, \sum_i \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) \delta \dot{\vec{r}}_i \\
&= -\delta \int dt \, V + \int dt \, \sum_i \frac{\partial T_i}{\partial \vec{v}_i} \delta \dot{\vec{r}}_i \\
&= -\delta \int dt \, V + \delta \int dt \, T = \delta \int dt \, L = 0
\end{aligned}
$$

Die Variation des Potentials $\delta \int dt \;\, V$ und die entsprechende Variation der kinetischen Energie ist verträglich mit den Zwangs- und den Randbedingungen.

Mit der Euler-Lagrangeschen Variationsgleichung folgt daraus wiederum Lagrange 2.

4.8 Erhaltungssätze

Der generalisierte/kanonische/konjungierte Impuls p_j ist definiert zu

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Ist die Lagrange Funktion nicht von einer generalisierten Variablen q_j abhängig, so ist diese Variable zyklisch. Der zugrhörige generalisierte Impuls ist eine Erhaltungsgröße.

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_j} \overset{\text{Lagrange II}}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt}p_j$$

Die Zeitableitung der Lagrangefunktion ergibt unter der Annahme, dass L nicht explizit von der Zeit abhängt und das Potenzial geschwindigkeitsunabhängig ist zu

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}} + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i \right) \\ &= \sum_i \frac{d}{dt}\left(p_i \dot{q}_i\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - L = const. = E = T + V$$

Zum Beweis, dass es sich bei dieser Konstanten um die Gesammtenergie handelt, wird die kinetische Energie berechnet:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2 = \sum_{lk} \frac{\alpha_{lk}}{2}\dot{q}_l \dot{q}_k \\ \alpha_{lk} &= \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \end{aligned}$$

Der generalisierte Impuls berechnet sich zu

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \sum_k \alpha_{kj}\dot{q}_k. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = 2T$$

und die obige Konstante kann als die Gesammtenergie identifiziert werden.

5 Hamilton Formalismus

5.1 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Um die gekoppelten Lagrange Bewegungsgleichungen zu vereinfachen, definiert man die Hamiltonfunktion

$$H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$$

die nur von den generalisierten Koordinaten und den generalisierten Impulsen abhängt. Beweis durch Berechnung der Differenzialform

$dH = \sum_i \left(dp_i\ \dot{q}_i + p_i\ d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt$
$= \sum_i \left(dp_i\ \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt$
$= \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\ + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt$

Aus dem Vergleich der letzten mit der zweiten Zeile folgen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{d}{dt}p_i = -\dot{p}_i \end{aligned}$$

5.2 Modifiziertes Hamiltonsches Prinzip

Aus dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta \int dt\ L = 0$$

erhällt man das modifizierte Hamiltonsche Prinzip

$$\delta \int dt\ \sum_{i=0}^{n} p_i \dot{q}_i - H(q,p,t) = 0.$$

Um von diesem modifizierten Hamiltonprinzip auf die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zu kommen, parametrisiert man den Weg (q,p) mit einer beliebigen Variation um den richtigen Weg:

$$\begin{aligned} q_i &= q_{i0} + \alpha \eta_i \\ p_i &= p_{i0} + \alpha \epsilon_i \end{aligned}$$

Damit ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\delta \int dt\ \sum_{i=0}^{n} p_i \dot{q}_i - H(q,p,t) \\ &= \int dt \sum_{i=0}^{n} \epsilon_i \dot{q}_i + p_i \dot{\eta}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \\ &= \int dt \sum_{i=0}^{n} \epsilon_i \dot{q}_i + p_i \dot{\eta}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\eta_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\epsilon_i \\ &= \int dt \sum_{i=0}^{n} \epsilon_i \dot{q}_i - \dot{p}_i \eta_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\eta_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\epsilon_i \\ &= \int dt \sum_{i=0}^{n} \epsilon_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \eta_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \end{aligned}$$

Durch eine passende Wahl der Variationen η und ϵ folgen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

5.3 Kanonische Transformation

Eine Transformation heißt kanonisch, wenn mit den neuen Koordinaten Q und P wiederum die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen gelten. Dies ist der Fall wenn das modifizierte Hamiltonsche Prinzip gültig ist. Es bleibt bei der Transformation gültig, wenn sich das Integral nach der Integration nur noch um einen konstanten Faktor unterscheidet. Es muss also gelten:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - h = \sum_i P_i \dot{Q}_i - H + \frac{dF(q,p,Q,P,t)}{dt}$$

Im folgenden sei $F(q,p,Q,P,t) = F_1(q,Q,t)$ o.B.d.A (da die Variablen nicht unabhängig sind). Somit ist

$$H - h - \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_i \dot{q}_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} - p_i \right) + \dot{Q}_i \left(\frac{\partial F}{\partial Q_i} + P_i \right).$$

Die Gleichung ist genau dann identisch null, wenn gilt die Transformationsgleichungen gelten:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ H &= h - \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned}$$

5.4 Poisson Klammer

Die Poisson Klammer ist für die dynamischen Variablen f und g definiert als

$$\{f,g\} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Es gilt die Jacobi Identität

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

Eine dynamische Variable f die nicht explizit von der Zeit abhängt ist genau dann eine Konstante der Bewegung wenn die Poissonklammer mit der Hammiltonfunktion verschwindet. Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{=0 \text{ nach Vor.}} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right] \\ &= \{f,H\} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Die Fundamentalklammern sind

$$\{p_i,p_j\} = \{q_i,q_j\} = 0, \qquad \{q_i,p_j\} = \delta_{ij}$$

Eine Transformation ist genau dann kanonisch, wenn auch für die neuen Koordinaten die Fundamentalklammern gelten. Zum Beweis wird berechnet:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_j &= \{Q_j,H\} = \sum_i \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_i} = \sum_k \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_i} \end{aligned}$$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, so ergibt sich nach Umformungen:

$$\dot{Q}_j = \sum_k \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q_k}\{Q_j,Q_k\} + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_k}\{Q_j,P_k\} \stackrel{!}{=} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_j}.$$

Die Bedingung, dass die Bewegungsgleichungen gelten, ist genau dann erfüllt, wenn die Fundamentalklammern gelten.

5.5 Noether Theorem

Die infinitesimale kanonische Transformation wird definiert zu

$$\begin{matrix} p_i \\ q_i \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \alpha_i = p_i + \delta p_i \\ \beta_i = q_i + \delta q_i \end{matrix}$$

Die erzeugende Funktion F_2, mit einer beliebigen Funktion f die von den alten Koordinaten und den neuen Impulsen abhängt, sei

$$F_2(q_i,\alpha_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i + \epsilon f(q_i,\alpha_i)$$

Mit den Regeln der kanonischen Transformation ergibt sich somit

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \alpha_i + \underbrace{\epsilon\frac{\partial f(q_i,\alpha_i)}{\partial q_i}}_{=-\delta p_i} \\ \beta &= \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_i} = q_i + \underbrace{\epsilon\frac{\partial f(q_i,\alpha_i)}{\partial \alpha_i}}_{=\delta q_i} \end{aligned}$$

Durch eine Taylorentwicklung von f ergibt sich durch konsequentes Vernachlässigen quadratischer infinitesimaler Größen:

$$\begin{aligned} \delta p_i &= -\epsilon\frac{\partial f(q_i,\alpha_i)}{\partial q_i} = -\epsilon\frac{\partial f(q_i,p_i)}{\partial q_i} = \epsilon\{p_i,f\} \\ \delta q_i &= \epsilon\frac{\partial f(q_i,\alpha_i)}{\partial p_i} = \epsilon\frac{\partial f(q_i,p_i)}{\partial p_i} = \epsilon\{q_i,f\} \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die Änderung einer dynamischen Variablen g, so ergibt sich wiederum nach Taylor:

$$\begin{aligned} \delta g &= g(\alpha_i,\beta_i) - g(p_i,q_i) \\ &= g(p_i,q_i) + \sum_i \left[\frac{\partial g}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial g}{\partial q_i}\delta q_i \right] - g(p_i,q_i) \\ &= \sum_i \left[-\frac{\partial g}{\partial p_i}\epsilon\frac{\partial f(q_i,p_i)}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial q_i}\epsilon\frac{\partial f(q_i,p_i)}{\partial p_i} \right] \\ &= \epsilon\{g,f\} \end{aligned}$$

Jetzt lässt sich das Noether Theorem formulieren:

$$\delta H = 0 \;\Leftrightarrow\; \{f,H\} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f,H\} = 0$$

Die Hamiltonfunktion H ist genau dann invariant unter der infinitesimalen Transformation die durch f erzeugt wird, wenn f eine Konstante der Bewegung ist.

6 Kleine Schwingungen

6.1 Harmonische Näherung

Bei einer minimalen Auslenkung $\eta = q - q_0$ der generalisierten Koordinaten q um ein Minimum q_0 des Potentials V lässt sich dieses nähern durch

$$\begin{aligned} V(q) &= V(q_0) + \underbrace{\sum_j \frac{\partial V}{\partial q_j}\Big|_{q_0}(q_j - q_{0_j})}_{=0} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_i}\Big|_{q_0}(q_j - q_{0j})(q_i - q_{0_i}) + \dots \\ &= const + \frac{1}{2}\sum_{i,j} K_{ij}\eta_i\eta_j. \end{aligned}$$

Hierbei ist K der Kraftkonstantentensor. Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{1}{2}\sum_{i,j} M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

mit

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sum_\alpha m_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \\ &= a_{ij}(q_0) + \text{Taylor} \end{aligned}$$

Die Lagrange Funktion ergibt sich somit zu:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(M_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - K_{ij}\eta_i\eta_j)$$

Eingesetzt in Lagrange II folgt die Vektorgleichung

$$M\ddot{\vec{\eta}} = -K\vec{\eta}$$

Mit dem harmonischen Ansatz $\vec{\eta}(t) = \vec{\eta}_0 \exp(i\omega t)$ lässt sich die Gleichung umformen zu

$$(K - \omega^2 M)\vec{\eta}_0 = \vec{0}$$

Die Matrix $K - \omega^2 M$ ist symmetrisch und positiv definit. Alle Eigenwerte ω_α sind größer oder gleich 0. Um nicht nur die triviale Lösung für ω zu erhallten, muss die Determinante ungleich null sein.

6.2 Normalschwingungen

Um die Komponenten $A_{j\alpha}$ der Normalschwingungen $\vec{\eta}_{\alpha 0}$ der zugehörigen Winkelfrequenz ω_α zu bestimmen, gilt

$$A_{j\alpha} = (-1)^{1+j}\det\left|\left[K - \omega_\alpha^2 M\right]^{ij}\right|$$

Hierbei ist $\left[K - \omega_\alpha^2 M\right]^{ij}$ die Matrix $K - \omega_\alpha^2 M$,wobei die erste Zeile und die j-te Spalte gestrichen ist. Der Beweis erfolgt durch Einsetzen.

7 Nichtlineare Systeme, Chaos

7.1 Logistische Gleichung

Die logistische Gleichung lautet

$$x_{n+1} = f_a(x) = a x_n(1 - x_n)$$

Fixpunkte ($x_n = x_{n+1}$) sind Attraktoren, wenn sie Iterationen anziehen. Bedingung für einen Attraktor

$$|f(x+\epsilon) - f(x)| < |(x+\epsilon) - x| = |\epsilon|$$

Daraus folgt:

$$\frac{|f(x+\epsilon) - f(x)|}{|\epsilon|} \to \left|\frac{df}{dx}\right| < 1$$

Entwickeln sich durch Verändern des Parameters a aus einem Attraktor zwei Attraktoren, so spricht man von einer Bifurkation.

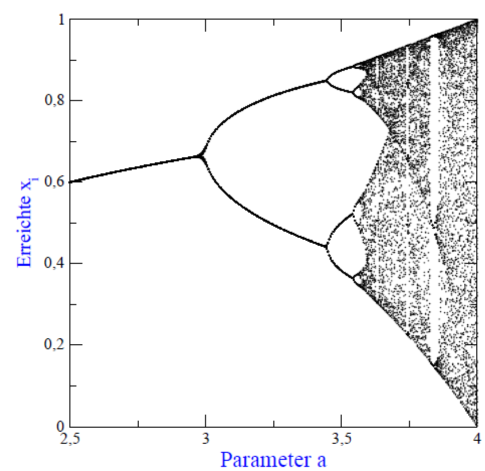

Abbildung 2: Bifurkationen der logistischen Ableitung

7.2 Physikalische Systeme

Sei $\vec{x}_0$ ein Fixpunkt eines physikalischen System im $2s$-Phasenraum, so ist

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) = 0.$$

Um nun festzustellen, ob ein Fixpunkt auch ein Attraktor ist, entwickelt man die Funktion F um den Fixpunkt $\vec{x}_0$ in einer Taylorreihe:

$$F^\alpha(\vec{x}) = \underbrace{F^\alpha(\vec{x}_0)}_{=0} + \sum_{\beta=1}^{2s}\underbrace{\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^\beta}}_{=A_{\alpha,\beta}}\left(x^\beta - x_0^\beta\right)$$

Es ist

$$\dot{\vec{x}} = A \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Der Ansatz

$$\vec{x}(t) - \vec{x}_0 = \exp\left[A \cdot (t - t_0)\right](\vec{x}(t_0) - \vec{x}_0)$$

löst die obige DGL. Die Matrix kann so transformiert werden, dass nur noch in deren Diagonalen die komplexen Eigenwerte $\lambda_\nu = ic + d$ stehen. Somit ist

$$\vec{x}^\nu(t) - \vec{x}_0^\nu = \exp\left[(ic+d)\,(t-t_0)\right]\,(\vec{x}^\nu(t_0) - \vec{x}_0^\nu)$$

Sind also alle Realteile der Eigenwerte negativ, so handelt es sich um gedämpfte Schwingungen um den Fixpunkt. Der Fixpunkt ist somit ein Attraktor.

7.3 Satz von Liouville

Betrachtet man eine Bahn $\vec{x}(t) = (q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)$ im Phasenraum, so bleibt das Volumen dV in einer infinitesimalen Umgebung eines Bahnpunktes erhalten. Die Phasenraumdichte ist

$$\rho = \frac{\text{Anzahl der Trajektorien}}{dV} = const.$$

Die Zeitliche Änderung von ρ ist

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial\rho}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\rho}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)$$

Durch Betrachtung der Ströme durch ein Rechteck im Phasenunterraum mit q_k, p_k ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial t} &= -\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{\partial}{\partial q_k}(\rho\,\dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k}(\rho\,\dot{p}_k)\right] \\
&= -\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{\partial\rho}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\dot{q}_k}{\partial q_k}\rho + \frac{\partial\rho}{\partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial\dot{p}_k}{\partial p_k}\rho\right] \\
&= -\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{\partial\rho}{\partial q_k}\dot{q}_k + \cancel{\rho\frac{\partial^2 H}{\partial q_k p_k}} \cancel{- \rho\frac{\partial^2 H}{\partial p_k q_k}} + \frac{\partial\rho}{\partial p_k}\dot{p}_k\right] \\
\frac{d\rho}{dt} &= 0
\end{aligned}$$

Somit ist die zeitliche Änderung der Dichte identisch null.

7.4 Stabilität

Bahnstabilität:

$$\min_{t'} |A(t) - B(t')| < \epsilon$$

Asymptotische Stabilität:

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty} B(t)$$

Lyapunov Stabilität:

$$\lim_{t\to\infty} |A(t) - B(t)| = 0$$

8 Spezielle Relativitätstheorie

8.1 Vierdimensionaler Raum

Kontravarianter und kovarianter Vierervektor:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad x_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Betragsquadrat:

$$|\vec{r}|^2 = x^\mu x_\mu = \sum_\mu x^\mu x_\mu = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ wandelt einen kovarianten in einen kontravarianten Vektor um:

$$x^\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

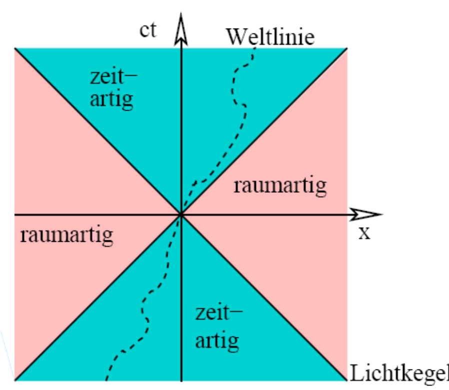

Abbildung 3: Weltlinie im Minkowskiraum

Punkte mit negativer Minkowskiabstand (s.o.) sind raumartig, Punkte mit positivem zeitartig.

8.2 Lorentz Transformation

Das Koordinatensystem K' bewege sich mit der Geschwindigkeit $v\hat{e}_x$ im Bezug auf das Koordinatensystem K. Die Transformation

$$x'^\nu = a_\mu^\nu x^\mu$$

ist linear mit

$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \beta = \frac{v}{c}.$$

Der Betrag des Vektors (im Minkowskiraum) ist bezüglich dieser Transformation invariant. Ereignisse im Ursprung von K' haben die Koordinaten $(ct\sqrt{1-\beta^2}, 0, 0, 0)$, befinden sich also tatsächlich im Ursprung.

8.3 Zeitdilatation

In einem mit der Geschwindigkeit v geboosteten Koordinatensystem K' gilt:

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 = c^2t'^2 - v^2t'^2.$$

Daraus folgt für zwei Ereignisse die sich aus Sicht des ruhenden Koordinatensystems K im Urspung und im zeitlichen Abstand t ereignen:

$$c^2t^2 - \underbrace{x^2}_{=0} = c^2t'^2 - v^2t'^2$$

$$\rightarrow \quad t = t' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

zu vervollständigen ...

8.4 Längenkontraktion

Die Länge ist maximal in dem Koordinatensystem, in dem der Körper ruht. Die Längenmessung findet in jedem Koordinatensystem gleichzeitig statt. Im mitbewegten Koordinatensystem gilt also

$$x_1 = 0, \quad x_2 \stackrel{!}{=} -l_0 \qquad t_1 = t_2 = 0$$

Durch die Lorentztransformation vom bewegten in das ruhende Koordinatensystem zurück, ergibt sich unter der Vorderung der Gleichzeitigkeit der Messung die Länge im relativ bewegten Koordinatensystem zu

$$x_1' = 0 \quad x_2' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l_0$$

8.5 Relativistische Bewegungsgleichung

Da die normale Geschwindigkeit (3er Vektor) kein kovarianter Lorentz Vektor ist, definiert man die 4er Geschwindigkeit zu:

$$\begin{aligned} u^\alpha &= \frac{d}{d\tau} x^\alpha = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} x^\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{dt} x^\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der 4er Impuls ergibt sich dann zu $p^\alpha = m\ u^\alpha$. Leitet man diesen nach der Eigenzeit τ ab, so erhällt man die Minkowskikraft. Im Ruhesystem des Teilchens ($v = 0$) gilt:

$$m \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{pmatrix}$$

Durch die Lorentztransformation erhällt man die Kraft in einem beliebigen Koordinatensystem:

$$\begin{pmatrix} K^0 \\ \vec{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{c} \\ \vec{F} + \beta^2 \frac{\vec{v}(\vec{v}\cdot F)}{v^2} \end{pmatrix}$$