Ringe

Definition: nilpotent

Algebra

Ringe

Definition: Integritätsring

Algebra

Ringe

Definition: Körper

Algebra

Ringe

Definition: Ideal

Algebra

Ringe

Satz: Chinesischer Restsatz

Algebra

Ringe

Definition: Noethersch

Algebra

Ringe

Definition: Primideal

Algebra

Ringe

Satz: Hilbertscher Nullstellensatz

Algebra

Ringe

Definitionen: irreduzibel und prim

Algebra

Ringe

Definition: Faktorieller Ring

Algebra

Ein Ring ist ein Integritätsring wenn es keine von 0 verschiedenen Nullteiler gibt.

Ein Element $a \in R \backslash \{0\}$ heißt nilpotent wenn es ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gibt, so dass $a^n = 0$.

Sei R ein Ring. Eine Teilmenge A heißt Ideal, fall sie folgende Eigenschaften hat

- Für alle $a, a' \in A$ gilt $a + a' \in A$
- Für jedes $r \in R$ und jedes $a \in A$ gilt $ra \in A$.

Man nennt A ein Hauptideal, wenn es von einem Element erzeugt wird.

Ein Ring ist ein Körper, wenn jedes von 0 verschiedene Element eine Einheit ist.

Ein K1-Ring heißt noethersch, wenn jedes Ideal endlich erzeugt ist.

Äquivalente Definition: Jede aufsteigende Kette $a_0 \subseteq a_1 \subseteq \ldots$ von Idealen in R wird stationär, d.h. es gibt ein n, so dass für alle $i \geq n$ gilt $a_i = a_n$.

Beweis der Äquivalenz mit Zornschem Lemma.

Es sei R ein Ring und $a_1, \ldots, a_n$ Ideale in R mit $a_i + a_j = R$ für alle i, j mit $i \neq j$. Dann hat man einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} R\Big/\bigcap_{i=1}^{n} a_i &\rightarrow R/a_1 \times \cdots \times R/a_n \\ r + \bigcap_{i=1}^{n} a_i &\mapsto (r + a_1, \ldots, r + a_n) \end{aligned}$$

Beweis mit Homomorphiesatz.

Ist R ein noetherscher Ring, so is auch der Polynomring $R[T]$ noethersch.

Ein Ideal A heißt Primideal, wenn es ein echtes Ideal ist (also nicht der ganze Ring) und mit zwei Elementen $a, b \in R$ für die gilt $ab \in A$ folgt, dass entweder $a \in A$ oder $b \in A$ gilt.

Beispiel: $\langle p \rangle$ ist ein Primideal in $\mathbb{Z}$ genau dann, wenn p eine Primzahl ist (oder $p = 0$).

Ein Ring R heißt faktoriell, falls R ein Integritätsring ist und jedes $a \in R$ mit $0 \neq a \notin R^*$ eine Zerlegung $a = p_1 \ldots p_n$ mit Primelementen $p_i \in R$ besitzt.

Ein Element $q \in R$ heißt irreduzibel, falls gilt

- $q \neq 0$ und $q \notin R^*$
- $q = ab$ mit $a, b \in R$ impliziert $a \in R^*$ oder $b \in R^*$

Ein Element $p \in R$ heißt prim, falls gilt

- $p \neq 0$ und $p \notin R^*$
- $p|ab$ mit $a, b \in R$ impliziert $p|a$ oder $p|b$

Ringe

Definition: Hauptidealring

Algebra

Ringe

Definition: Euklidischer Ring

Algebra

Ringe

Satz: Gauß

Algebra

Ringe

Definition: Primitives Polynom

Algebra

Ringe

Satz: Eisensteinsches Irreduzibilitätskriterium

Algebra

Ringe

Definition: Modul

Algebra

Ringe

Definition: Dualer Modul

Algebra

Ringe

Definition: Freier Modul

Algebra

Ringe

Definition: Rang eines Moduls

Algebra

Ringe

Definition: Torsionselement

Algebra

Ein euklidischer Ring ist ein Integritätsring R zusammen mit einer Abbildung $\delta : R\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, so dass es zu $a \in R$ und $0 \neq b \in R$ stets $q, r \in R$ gibt mit

$$a = qb + r \quad \text{wobei} \quad \delta(r) < \delta(b) \text{ oder } r = 0$$

Einen Ring R nennt man Hauptidealring, wenn er ein Integritätsring ist und jedes seiner Ideale Hauptideal ist.

Ein Polynom heißt primitiv, wenn seine Koeffizienten Teilerfremnd sind, d.h. falls $1 \in \mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n)$ gilt.

Ist R ein faktorieller Ring, so ist auch $R[T]$ faktoriell.

Es sei R ein Ring. Ein unitärer R-Modul ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung

$$R \times M \to M, \quad (r, u) \mapsto r \cdot u$$

genannt Skalarmultiplikation, so dass folgendes gilt

$$1 \cdot m = m, \qquad (r'r) \cdot m = r' \cdot (r' \cdot m),$$
$$(r' + r) \cdot m = r' \cdot m + r \cdot m,$$
$$r \cdot (m + m') = r \cdot m, + r \cdot m'$$

Es sei R ein faktorieller Ring und $f = a_nT^n + \cdots + a_1T + a_0 \in R[T]$ ein primitives Polynom mit $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$. Gibt es ein Primelement $p \in R$ mit

$$p \nmid a_n, \quad p \mid a_{n-1}, \ldots, p \mid a_0, \quad p^2 \nmid a_0$$

so ist das Polynom f ein Primelement (und somit irreduzibel) in $R[T]$ und somit auch in dem Ring $Q(R)[T]$.

Einen R-Modul M heißt frei, falls $M = \{0\}$ gilt oder M eine eine Basis, d.h. ein linear unabhängiges Erzeugendensystem besitzt.

Es seien R ein Ring und M, N zwei R-Moduln. Die Menge aller R-Modulhomomorphismus von M nach N wird durch

$$(\phi + \psi)(u) := \phi(u) + \psi(u), \quad (r \cdot \phi)(u) := r \cdot \phi(u)$$

zu einem R-Modul. Ist $N = R$, so erhällt man den zu M dualen R-Modul $M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$.

Es sei R ein Ring, M ein R-Modul.
Ein Element $u \in M$ heißt Torsionselement, falls $r \cdot u = 0$ mit einem $0 \neq r \in R$ gilt. Die Menge aller Torsionselemente in M bezeichnet man als $T(M)$. M heißt Torsionsmodul, wenn $M = T(M)$ gilt, und torsionsfrei, falls $T(M) = \{0\}$.

Der Rang $\mathrm{rg}_R(M)$ eines Moduls M ist das Supremum über die Ordnungen A, wobei A die linear unabhängigen Teilmengen von M durchläuft.

Ringe

Definition: Inhalt

Algebra

Ringe

Satz: Elementarteilersatz

Algebra

Es sei R ein Hauptideal Ring, F ein freier Modul endlichen Ranges und $M \leq_R F$ ein Untermodul. Dann gibt es eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von F und Elemente $a_1, \ldots, a_m \in R$, sodass gilt:
- $\{a_1 v_1, \ldots, a_n v_n\}$ eine Basis für M ist
- $a_i | a_{i+1}$ für $1 \leq i \leq m-1$

Die Elemente $a1, \ldots a_m \in R$ sind durch diese Eigenschaft bis auf Assoziertheit eindeutig bestimmt.

Es seien R ein Hauptidealring und F ein freier Modul. Der Inhalt eines Elementes $v \in F$ ist ein Erzeuger des Ideals $a_v = \{u(v); u \in F^*\} \trianglelefteq_R R$.
Die Menge aller Inhalte von v bezeichnet man mit $\mathrm{cont}(v)$. Man nennt v primitiv, falls $\mathrm{cont}(v) = R^*$ gilt.