Gruppen

S_n

Algebra

Gruppen

C_n

Algebra

Gruppen

D_n

Algebra

Gruppen

A_n

Algebra

Gruppen

Automorphismengruppe

Algebra

Gruppen

Definition: Gruppe

Algebra

Gruppen

Definition: Nebenklasse

Algebra

Gruppen

Eigenschaften: Äquivalenzrelation

Algebra

Gruppen

Satz: Lagrange

Algebra

Gruppen

Definition: Normalteiler

Algebra

Einheitswurzelgruppe

$$C_n = \{\zeta \in \mathbb{C}; \zeta^n = 1\}$$

Permutationsgruppe

$$S_n = S(X_n) = \{\sigma : X \to X \ \sigma \text{ ist bijektiv}\}$$

$$S(X) \times S(X) \to S(X), \quad (\sigma, \tau) \mapsto \sigma \circ \tau$$

Alternierende Gruppe (Untergruppe von S_n).

$$A_n := \{\sigma \in S_n;\ \mathrm{sg}(\sigma) = 1\}$$

Es ist

$$[S_n : A_n] = 2$$

Diedergruppe (Untergruppe von S_n). Wird erzeugt von den beiden Permutationen

$$\begin{aligned} \delta &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{bmatrix} \\ \sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-11 & \dots & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D_n entspricht den Symmetrien eines regelmäßigen n-Ecks.

Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer assoziativen Verknüpfung und einem neutralen Element $e \in G$, sodass jedes $g \in G$ ein Inverses $g^{-1} \in G$ besitzt. Eine Gruppe nennt man abelsch, wenn die Verknüpfung kommutativ ist.

Sei G eine Gruppe. Die Automorphismen Gruppe von G ist

$$\begin{aligned} &\mathrm{Aut}(G) := \\ &\{\varphi : G \to G;\ \ \varphi \text{ ist Gruppenisomorphismus}\} \\ &\leq S(G) \end{aligned}$$

- $g \sim_H g$ für alle $g \in G$ (Reflexivität)
- $g_1 \sim_H g_2 \Rightarrow g_2 \sim_H g_1$ für alle $g_1, g_2 \in G$ (Symmetrie)
- $g_1 \sim_H g_2$ und $g_2 \sim_H g_3 \Rightarrow g_1 \sim_H g_3$ für alle $g_1, g_2, g_3 \in G$ (Transitivität).

Sei G ein Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe.

Die Linksnebenklasse eines Elements $g \in G$ ist

$$gH := \{gh;\ h \in H\} \subseteq G$$

Die Rechtsnebenklasse eines Elements $g \in G$ ist

$$Hg := \{hg;\ h \in H\} \subseteq G$$

Eine Untergruppe $H \leq G$ ist ein Normalteiler (geschrieben $H \trianglelefteq G$), genau dann wenn für alle $g \in G$ gilt:

$$gHg^{-1} = H$$

In einer abelschen Gruppe ist jede Untergruppe ein Normalteiler.

Es sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe.

$$|G| = [G : H] \cdot |H|$$

Beweisidee: Betrachte Äquvalenzrelation

$$g_1 \sim_H g_2 :\Leftrightarrow g_2^{-1} g_2 \in H$$

Dann sind die Äquivalenzklassen gleich der Linksnebenklassen. Man erhällt dadurch eine disjunkte Vereinigung von G. Es ist $|gH| = |H|$, da L_g bijektiv.

Gruppen

Faktorgruppe

Algebra

Gruppen

Homomorphismus von Gruppen

Algebra

Gruppen

Satz: Homomorphiesatz

Algebra

Gruppen

Definition: Zyklische Gruppe

Algebra

Gruppen

Satz: Kleiner Farmatscher Satz

Algebra

Gruppen

Definition: Gruppenwirkung

Algebra

Gruppen

Satz von Cayley

Algebra

Gruppen

Definition: Isotropiegruppe

Algebra

Gruppen

Definition: Bahn

Algebra

Gruppen

Definition: Bahnenraum

Algebra

Ein Homomorphismus ist eine Abbildung ϕ zwischen zwei Gruppen G und H, die folgende Eigenschaft für alle $g_1, g_2 \in G$ erfüllt:

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2).$$

Ein Homomorphismus heißt Monomorphismus, wenn er injektiv ist, Epimorphismus wenn er surjektiv ist und Isomorphismus wenn er bijektiv ist.

Sei $H \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. G/H ist die Menge aller Linksnebenklassen:

$$G/H := \{gH;\ g \in G\}$$

Mit der Verknüpfung

$$G/H \times G/H \to G/H \quad (g_1 H, g_2 H) \mapsto g_1 g_2 H$$

ist G/H eine Gruppe.

Eine Gruppe G heißt zyklisch, wenn sie von einem Element erzeugt wird. Es gibt also ein $g \in G$, so dass gilt

$$G = \langle g \rangle = \{g^n;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Jede endliche Gruppe mit $|G| = p$ prim ist eine zyklische Gruppe. Erzeugendes Element ist ein beliebiges Element $g \neq e_G$. (Beweis mit Lagrange)
Eine zyklische Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ wenn sie endlich ist, sonst ist sie isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Es sei $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit $N \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\bar{\varphi} : G/N \to H$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\varphi : g \mapsto \varphi(g)"] \arrow[dr, "\pi : g \mapsto gN"'] & & H \arrow[dl, "\bar{\varphi} : gN \mapsto \varphi(g)"] \\
& G/N &
\end{tikzcd}$$

Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine Wirkung (Operation) von G auf X ist eine Abbildung

$$\mu : G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

die folgende Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned} e_G \cdot x &= x \\ g_1 \cdot (g_2 \cdot x) &= (g_1 g_2) x \end{aligned}$$

Es sei G eine endliche Gruppe mit $n = |G|$. Dann gilt $g^n = e_G$ für alle $g \in G$.

Beweis: Sei $m = \mathrm{ord}_G(g) = |\langle g \rangle|$. Nach Langrange gilt $n = dm$. Somit:

$$g^n = g^{dm} = (g^m)^d = e_G^d = e_G$$

Die Isotropiegruppe (Stabilisator) ist:

$$G_x := \{g \in G;\ \ g \cdot x = x\} \leq G$$

Jede Gruppe G mit $|G| = n$ ist isomorph zu einer Untergruppe der Permutationsgruppe S_n.
Beweis: Betrachte Gruppenwirkung von G auf sich selbst durch Linkstranslation. Zeige dass der Homomorphismus injektiv ist.

Der Bahnenraum ist die Menge aller G-Bahnen in X

$$X/G := \{G \cdot x;\ \ x \in X\}$$

Die Bahn eines Punktes $x \in X$ ist

$$G \cdot x := \{g \cdot x;\ \ g \in G\} \subseteq X$$

Gruppen

Definition: Fixpunkt

Algebra

Gruppen

Satz: Bahnengleichung

Algebra

Gruppen

Satz: Fixpunktsatz

Algebra

Gruppen

Definition: Zentralisator

Algebra

Gruppen

Definition: Zentrum

Algebra

Gruppen

Definition: p-Untergruppe

Algebra

Gruppen

Satz: Sylow

Algebra

Gruppen

Definition: Normalreihe und auflösbar

Algebra

Gruppen

Definition: Kleinsche Vierergruppe

Algebra

Gruppen

Satz: Kommutatorgruppen von S_n und A_n

Algebra

Es sei $G \times X \to X$ eine Wirkung, und $x_i, i \in I$ ein vollständiges Repräsantensystem für den Bahnenraum X/G, d.h. es gelte $X/G = \dot{\bigcup}_{i \in I} G \cdot x_i$. Dann gilt

$$|X| = \sum_{i \in I} |G \cdot x_i| = \sum_{i \in I} [G : G_{x_i}]$$

Ein Fixpunkt einer G-Wirkung auf X ist ein $x \in X$, für dass gilt

$$x = g \cdot x \quad \forall g \in G$$

Es sei G eine Gruppe. Der Zentralisator eines Elementes ist die Untergruppe

$$Z_g := \{a \in G;\ \ ag = ga\} \leq G$$

Sei $G \times X \to X$ eine Wirkung einer endlichen Gruppe auf einer endlichen Menge. Gilt $|G| = p^k$ und $p \nmid |X|$ mit einer Primzahl p, so besitzt die Wirkung einen Fixpunkt.

Beweis:
Sei $x_i, i \in I$ ein vollständiges Repräsantensystem. Nach Lagrange gilt $[G : G_{x_i}] = p^{l_i}$ mit $l_i \leq k$. Setze das in Bahnengleichung ein, dann folgt mindestens ein l_i muss null sein.

Eine p-Untergruppe $H \leq G$ ist eine Untergruppe mit $|H| = p^k$. p ist Primzahl.
Ist p kein Teiler von $[G : H]$, so ist H eine p-Sylow-Gruppe.

Es sei G eine Gruppe. Das Zentrum von G ist die abelsche Unterguppe

$$Z_G := \bigcap_{g \in G} Z_g = \{a \in G;\ \ ag = ga \quad \forall g \in G\} \leq G$$

Es sei G eine Gruppe. Eine Normalreihe in G ist eine absteigende Kette von Untergruppen

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_n = \{e_G\}$$

Dabei sind G_{i+1} Normalteiler in G_i. Der i-te Faktor einer solchen Normalreihe ist G_i/G_{i+1}.

Eine Gruppe ist auflösbar, wenn sie eine Normalreihe besitzt, in der alle Faktoren abelsch sind. Jede abelsche Gruppe ist auflösbar.

Es sei G eine endliche Gruppe mit $n = |G|$ und p eine Primzahl.

- Jede p-Untergruppe von G ist in einer p-Sylowgruppe von G enthalten.
- Je zwei p-Sylow-Gruppen sind konjugiert zueinander.
- Sei s die Anzahl der p-Sylowgruppen in G, dann gilt $s | n \quad \text{und} \quad s \equiv 1 \mod p$

$$\begin{aligned}
[S_n, S_n] &= A_n \quad \text{für } n \geq 1 \\
[A_n, A_n] &= \begin{cases} \{id\} & \text{für } n = 1,2,3 \\ V_4 & \text{für } n = 4 \\ A_n & \text{für } n \geq 5 \end{cases}
\end{aligned}$$

$V_4 := \{\mathrm{id}, (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\} \leq A_4$

V_4 ist Normalteiler in A_4 und isomorph zu
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.