Praktikum I PP
Physikalisches Pendel

Hanno Rein

Betreuer: Heiko Eitel

16. November 2003

1 Ziel der Versuchsreihe

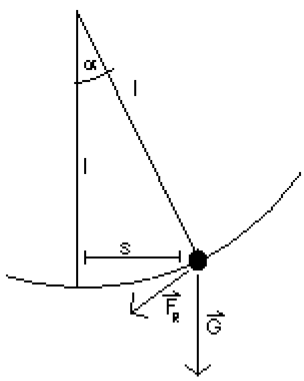
In der Physik lassen sich viele Vorgänge mit Hilfe von Schwingungen beschreiben. Die klassische Anordnung zur Erzeugung einer (harmonischen) Schwingung ist das Pendel. Im Gegensatz zum mathematischen Pendel ist das physikalische Pendel weniger stark idealisiert.

2 Grundlagen

2.1 Mathematisches Pendel

Das mathematische Pendel ist eine Näherung an das reale Pendel. Hierbei wird die Masse zu einem Massenpunkt vereinigt und die Schnur als nicht dehnbar und masselos idealisiert. Das Pendel kann dazu benutzt werden die Erdbeschleunigung näherungsweise zu bestimmen.

Formel zur Berechnung von g
Skizze:



Für die Rückstellkraft gilt

$$F_R = -mg \sin\alpha = ma \tag{1}$$

Für kleine Winkel gilt die Näherung

$$sin\alpha = \alpha \tag{2}$$

$$ma = -mg\frac{s}{l} \tag{3}$$

und somit

$$\ddot{s} \cdot l + g \cdot s = 0 \tag{4}$$

Eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist

$$s(t) = A_1 \sin \omega t \tag{5}$$
$$\dot{s}(t) = A_1 \omega \cos \omega t \tag{6}$$
$$\ddot{s}(t) = -A_1 \omega^2 \sin \omega t \tag{7}$$

Da zu jeder Zeit Gleichung (4) gelten muss, gilt

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \tag{8}$$
$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{l} \tag{9}$$
$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \tag{10}$$

Wobei T die Periodendauer einer Schwingung und l die Länge des Pendels von der Aufhängung bis zu seinem Masseschwerpunkt ist.

2.2 Physikalisches Pendel

2.2.1 Unterschiede zum mathematischen Pendel

Die Differenzialgleichung (4) wird wegen der Dämpfung erweitert:

$$\ddot{s} + 2\gamma \dot{s} + {\omega_0}^2 s = 0 \tag{11}$$

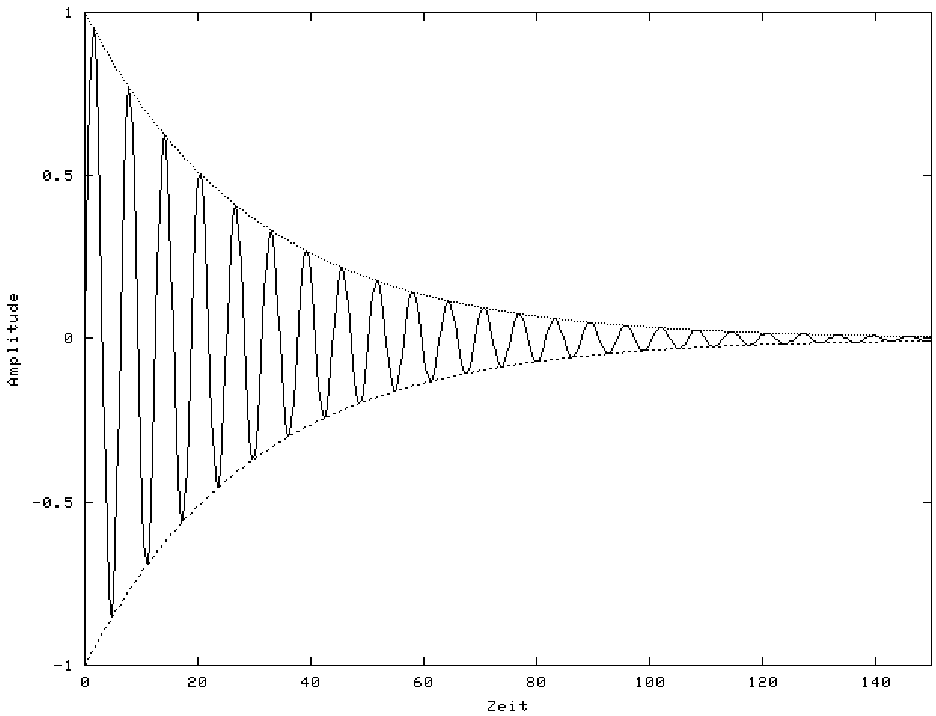
Hierbei ist die Dämpfungskonstante $\gamma = \frac{b}{2m}$ und die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$. b ist die Dämpfungskonstante des Ringes. Eine Lösung dieser DGL ist

$$x(t) = \hat{x} e^{-\lambda t} \cos(\omega_D t) \tag{12}$$

Für die Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Pendels gilt der Zusammenhang

$$\omega_0 = \sqrt{{\omega_D}^2 + \gamma^2} \tag{13}$$

Hierbei ist ω_D die Kreisfrequenz des gedämpften Pendels. Ein Beispiel für eine gedämpfte Schwingung könnte etwa folgendes Schaubild sein:



2.2.2 Logarithmisches Dekrement δ

Seien A_1 und A_2 zwei aufeinander folgende Maxima der Amplitude, so gilt für deren Verhältnis bei einer gedämpften Schwingung

$$\frac{A_1}{A_2} > 1 \tag{14}$$

Das logarithmische Dekrement δ ist nun definiert als

$$\delta = \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \tag{15}$$

Die Dämpfungskonstante γ, die ein Maß für die Dämpfung darstellt, ist

$$\gamma = \frac{\delta}{T} \tag{16}$$

Wobei T die Periodendauer zwischen den beiden Maxima A_1 und A_2 ist. Das logarithmische Dekrement ist ein Maß für die Dämpfung während einer Periode, die Dämpfungskonstante γ ist dagegen unabhängig von der Periodendauer.

3 Auswertung

3.1 Kleinwinkelnäherung

Bei konstanter Länge $l_0 = 24.1cm$, konstanter Masse $m_0 = 43.7g$ und ohne Dämpfung durch die Wirbelstrombremse wird bei verschiedenen Auslenkungen jeweils die Kreisfrequenz gemessen. Der theoretische Wert liegt ohne Berücksichtigung des Trägheitsmoments des Stabes und der Scheibe bei

$$\omega_{0t} = \sqrt{\frac{m_0 g l_0}{\Theta}} = \sqrt{\frac{g}{l_0}} = 6.38s^{-1} \tag{17}$$

Die Messungen ergaben folgende Messwerte und Abweichungen zum theoretischen Wert

	60°	45°	20°	10°
ω_0 in s^{-1}	5.71	5.84	6.13	6.13
Fehler $\frac{\omega_{0t}-\omega_0}{\omega_{0t}}$	10.5 %	8.5 %	3.9 %	3.9 %

Ab wann die Kleinwinkelnäherung gilt, hängt von der gewünschten Genauigkeit des Ergebnisses ab. Akzeptiert man einen Fehler $< 5\%$, so gilt die Näherung, laut unserer Versuchsreihe, für Winkel $< 20°$.

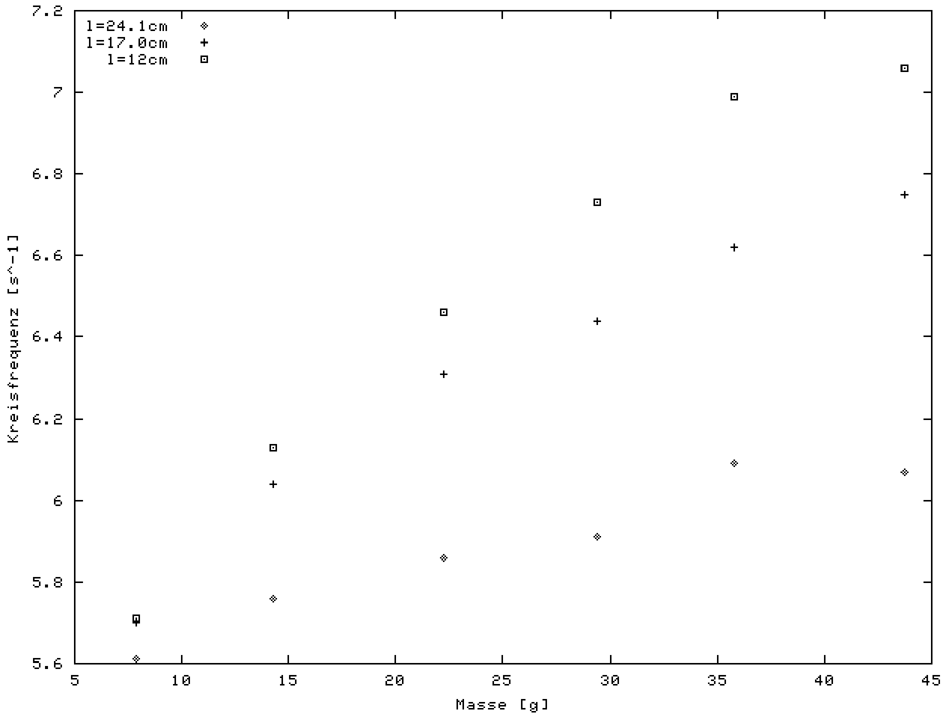
3.2 Abhängigkeiten der Kreisfrequenz

Zur Bestimmung der Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω von der Länge l und der Masse m werden insgesamt 18 Messungen durchgeführt. Die Ergebnisse für ω sind (in s^{-1}):

Masse m in g	7.9	14.3	22.2	29.4	35.8	43.7
$l = 24.1cm$	5.61	5.76	5.86	5.91	6.09	6.07
$l = 17.0cm$	5.70	6.04	6.31	6.44	6.62	6.75
$l = 12.0cm$	5.71	6.13	6.46	6.73	6.99	7.06

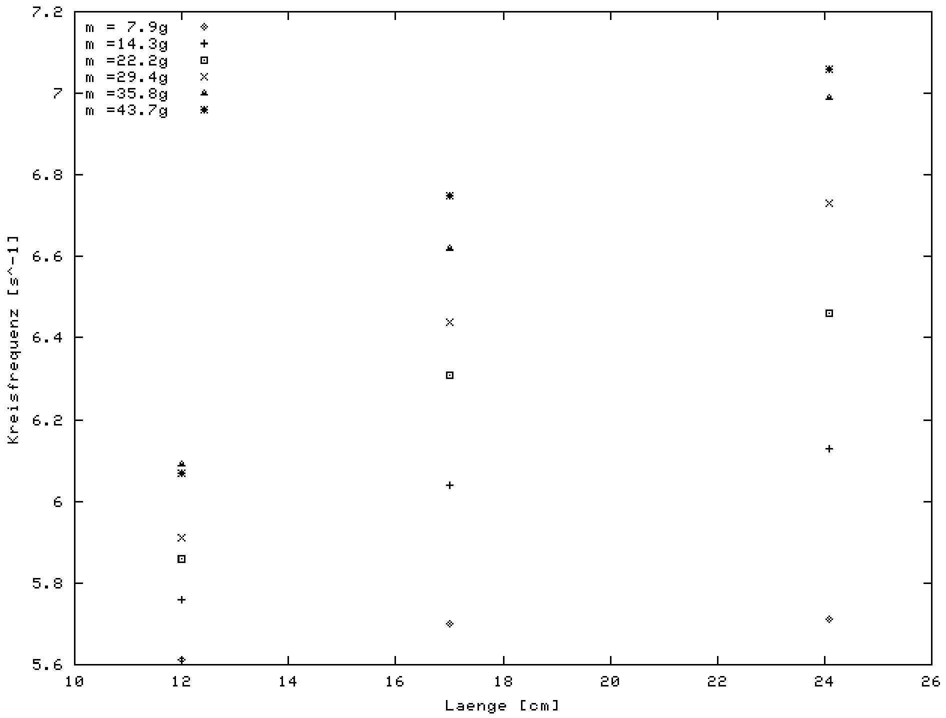
3.2.1 Massenabhängigkeit der Kreisfrequenz

Aus obiger Tabelle ergibt sich folgendes Schaubild für die Massenabhängigkeit von ω



3.2.2 Längenabhängigkeit der Kreisfrequenz

Für die Längenabhängigkeit von ω ergibt sich



Geht man vom mathematischen Pendel aus, dürfte die Kreisfrequenz nur von der Länge l abhängen. Aus den Schaubildern lässt sich aber deutlich erkennen, dass dies eine recht grobe Vereinfachung ist.

3.3 Berechnung der Erdbeschleunigung

Mit Hilfe der gemessenen Kreisfrequenz lässt sich nun die Erdbeschleunigung g berechnen. Die Frequenzverschiebung durch die Dämpfung wird nicht berücksichtigt. Nimmt man für den zufälligen Fehler der Periodendauer einen Wert von $20 \cdot 10^{-3}s$ und für den zufälligen Fehler bei der Längenmessung von $|\Delta l_{zuf}| = 1 \cdot 10^{-3}m$ an, so ergibt sich nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$|\Delta g_{zuf}| \quad = \quad \sqrt{\left(\frac{\delta g}{\delta t}\Delta t_{zuf}\right)^2 + \left(\frac{\delta g}{\delta l}\Delta l_{zuf}\right)^2} \qquad (18)$$

Nach Gleichung (10) gilt somit für g in Abhängigkeit der Masee und Länge (in ms^{-2})

Masse m in g	7.9	14.3	22.2	29.4	35.8	43.7
$l = 24.1cm$	7.58 ± 0.09	8.00 ± 0.09	8.28 ± 0.10	8.42 ± 0.10	8.94 ± 0.11	8.88 ± 0.11
$l = 17.0cm$	7.63 ± 0.10	6.20 ± 0.08	6.77 ± 0.09	7.05 ± 0.09	7.45 ± 0.10	7.75 ± 0.11
$l = 12.0cm$	3.91 ± 0.05	4.51 ± 0.06	5.01 ± 0.07	5.44 ± 0.08	5.86 ± 0.08	5.98 ± 0.09

Man erkennt, dass g erst sinnvolle Werte annimmt, wenn die Masse und die Länge des Pendels hinreichend groß werden. Für diesen Fall sind die störenden Effekte, die unter anderem die Aufhängung mit sich bringt, vernachlässigbar.

3.4 Dämpfung

Die Amplituden A_1, A_2 wurden bei verschiedenen Dämpfungen an zwei aufeinanderfolgenden Maxima gemessen.

	$\frac{A_1}{A_2}$	$\delta = ln\frac{A_1}{A_2}$	T	$\gamma = \frac{\delta}{T}$
systemeigene Dämpfung	1.11	0.105	$1.04s$	$0.101s^{-1}$
stärkste Dämpfung	2.17	0.773	$1.05s$	$0.733s^{-1}$
mittlere Dämpfung	1.31	0.270	$1.03s$	$0.262s^{-1}$
schwache Dämpfung	1.15	0.140	$1.04s$	$0.135s^{-1}$

Der Theorie nach sollte sich die Frequenz bei unterschiedlichen Dämpfungen ändern. Leider konnte unsere Versuchsreihe dies nicht bestätigen.