Praktikum I MW
Maxwellsches Rad

Hanno Rein

Betreuer: Christian Trück

16. November 2003

1 Ziel der Versuchsreihe

Es gibt in der Physik zwei grundlegende Bewegungsarten. Die Translation und die Rotation. Bei dem vorliegenden Versuch wird die Bewegung eines Körpers ausgewertet, der als Maxwellsches Rad bezeichnet wird.

2 Grundlagen

2.1 Trägheitsmoment

Ein fester, ausgedehnter Körper dreht sich um eine feste Achse A. Die kinetische Energie eines Massestücks Δm_i ist dabei

$$E_{kin,i} = \frac{1}{2}\Delta m_i {v_i}^2 \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2 \tag{2}$$

Summiert man nun über alle Massestücke Δm auf, und lässt deren Größe gegen Null streben, so erhält man für die gesammte Rotationsenergie des Körpers

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 \mathrm{dm} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \varrho \int r^2 \mathrm{dV} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Per Definition ist das Trägheitsmoment Θ des Körpers

$$\Theta = \varrho \int r^2 \mathrm{dV} = \int r^2 \mathrm{dm} \tag{6}$$

2.2 Vergleich Translation - Rotation

Die Größen der beiden Bewegungsarten Translation und Rotation lassen sich miteinander vergleichen:

Translation	**Rotation**
Masse m	Trägheitsmoment Θ
Geschwindigkeit $v = \frac{\partial x}{\partial t}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\partial \phi}{\partial t}$
Energie $E = \frac{1}{2}mv^2$	Energie $E = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$
Impuls $p = mv$	Drehimpuls $L = \Theta\omega$
Kraft $F = ma = \frac{\partial p}{\partial t}$	Drehmoment $D = r \times F = \frac{\partial L}{\partial t}$

3 Versuchsdurchführung

Das Metallrad ist auf einer dünnen Achse montiert. An jeder Seite der Achse ist ein Faden befestigt. Dreht man das Rad, so wickelt sich dieser auf die Achse auf. Lässt man das Rad mit aufgewickeltem Faden an einer bestimmten Höhe los, so versetzt sich das Rad durch die Gravitationskraft in Bewegung. Gleichzeitig wirkt ein Drehmoment, das das Rad in Rotation bringt.

Zunächst wird der genaue wirksame Achsenradius bestimmt. Hierzu wird das Seilstück n mal auf einer bekannten Länge aufgerollt. Danach wird bei 10 verschiedenen Abständen jeweils 5 mal die Fallzeiten T bestimmt. Um das Trägheitsmoment Θ des Rades zu bestimmen, werden noch 20 Versuche mit gleicher Fallhöhe durchgeführt.

4 Auswertung

4.1 Wirksamer Achsenradius

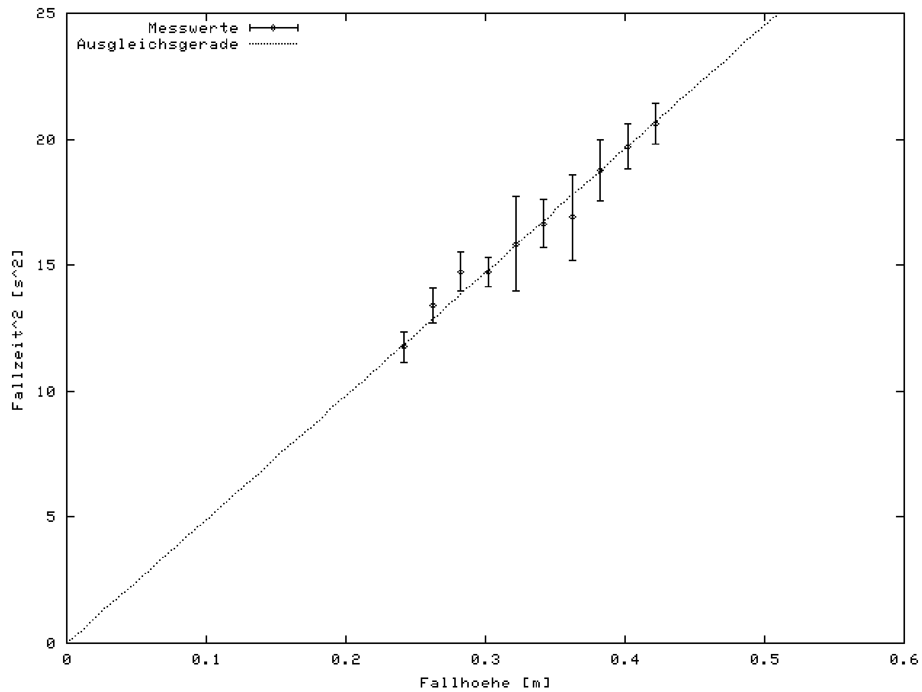
19 Windungen ergeben einen Höhenunterschied von $h = 0.422m$. Es gilt somit

$$r = \frac{h}{2\pi n} = 3.535 \cdot 10^{-3} m \tag{7}$$

4.2 Abhängigkeit zwischen T und h

Aus der Messung ergeben sich folgende Werte, sowie das Diagramm von $T^2(h)$:

Fallhöhe h [m]	Fallzeit $\bar{T}$ [s]	σ_T [s]	$\bar{T}^2$ [s^2]	$\sigma_{T^2} = \lvert 2\sigma_T \bar{T} \rvert$
0.42	4.45	0.09	20.65	0.80
0.40	4.44	0.10	19.74	0.90
0.38	4.33	0.14	18.71	1.20
0.36	4.11	0.21	16.92	1.72
0.34	4.08	0.12	16.65	0.95
0.32	3.98	0.24	15.86	1.88
0.30	3.84	0.08	14.73	0.59
0.28	3.84	0.10	14.71	0.79
0.26	3.66	0.10	13.41	0.71
0.24	3.43	0.09	11.79	0.62



Aus dem Diagramm kann man trotz der großen zufälligen Fehlern leicht erkennen, dass die Abhängigkeit $T^2 \sim h$ korrekt ist.

4.3 Bestimmung des Trägheitsmoments

Nach dem Energieerhaltungssatz gilt für das Trägheitsmoment Θ:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 \tag{8}$$

$$\Theta = \frac{2mgh}{\omega^2} - \frac{mv^2}{\omega^2} \tag{9}$$

$$\Theta = \frac{2mghr^2}{v^2} - \frac{mv^2r^2}{v^2} \tag{10}$$

$$\Theta = \frac{2mghr^2T^2}{4h^2} - mr^2 \tag{11}$$

$$\Theta = mr^2\left(\frac{gT^2}{2h} - 1\right) \tag{12}$$

Mit einer Masse von $m = 0.450\text{kg}$, der Fallhöhe $h = 0.422\text{m}$, der Fallzeit $\bar{T} = 4.50\text{s}$ und der Erdbeschleunigung $g = 9.81\text{ms}^{-2}$ ergibt sich

$$\bar{\Theta} = 13.18\text{Kgcm}^2 \tag{13}$$

Der zufällige Fehler der Längenmessung wird auf $\sigma_h = 2 \cdot 10^{-3}\text{m}$ geschätzt. Für den zufälligen Fehler der Zeitmessung gilt $\sigma_T = 0.14\text{s}$. Mit der gaussschen Fehlerfortplanzung ergibt sich für den zufälligen Fehler $\Delta\Theta$:

$$\Delta\Theta_{zuff} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial h}\Theta\sigma_h\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial T}\Theta\sigma_T\right)^2} \tag{14}$$

$$= \sqrt{\left(-mr^2\frac{gT^2}{2h^2}\sigma_h\right)^2 + \left(2mr^2\frac{gT}{2h}\sigma_T\right)^2} \tag{15}$$

$$= gmr^2\sqrt{\left(\frac{T^2}{2h^2}\sigma_h\right)^2 + \left(\frac{T}{h}\sigma_T\right)^2} \tag{16}$$

$$= 8.26 \cdot 10^{-1}\text{Kgcm}^2 \tag{17}$$

Der systematische Fehler des Zeitmessers wird mit 0.01% angegeben. Somit ist $\Delta T_{sys} = T \cdot 10^{-4} = 4.5 \cdot 10^{-4}\text{s}$. Der systematische Fehler der Längenmessung ist $\Delta h_{sys} = 2 \cdot 10^{-4}\text{m} + 5 \cdot 10^{-4}\text{h} = 4.11 \cdot 10^{-4}\text{m}$. Für den systematischen Fehler des Trägheitsmoments ergibt sich aus der Taylerentwicklung erster Ordnung:

$$\Delta\Theta_{sys} = \left|\frac{\partial}{\partial h}\Theta\Delta h_{sys}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial T}\Theta\Delta T_{sys}\right| \tag{18}$$

$$= \left|-mr^2\frac{gT^2}{2h^2}\Delta h_{sys}\right| + \left|2mr^2\frac{gT}{2h}\Delta T_{sys}\right| \tag{19}$$

$$= gmr^2\left(\left|\frac{T^2}{2h^2}\Delta h_{sys}\right| + \left|\frac{T}{h}\Delta T_{sys}\right|\right) \tag{20}$$

$$= 8.863 \cdot 10^{-1}\text{Kgcm}^2 \tag{21}$$

Somit ergibt sich für das Trägheitsmoment des Rades:

$$\Theta = 13.18\text{Kgcm}^2 \pm 8.26 \cdot 10^{-1}\text{Kgcm}^2(\text{sys.}) \pm 8.863 \cdot 10^{-1}\text{Kgcm}^2(\text{zuf.}) \tag{22}$$