Praktikum II

MR: Mechanische Resonanz

Betreuer: Norbert Lages

Hanno Rein
praktikum2@hanno-rein.de

Florian Jessen
florian.jessen@student.uni-tuebingen.de

13. April 2004

Made with LaTeX and Gnuplot

1 Vorwort

In der Physik lassen sich viele Vorgänge mit Hilfe von Schwingungen beschreiben. Die klassische Anordnung zur Erzeugung einer harmonischen Schwingung ist das Federpendel.

2 Grundlagen

2.1 Bewegungsgleichungen

2.1.1 Freie, ungedämpfte Schwingung

Beim Federpendel ist die rücktreibende Federkraft F_{Feder} proportional zur Auslenkung:

$$F_{Feder}(x) = -D \cdot x \tag{1}$$

Mit Hilfe des zweiten newtonschen Axioms ($F = m \cdot \ddot{x}$) erhält man die Bewegungsgleichung einer freien und ungedämpften Schwingung:

$$\begin{aligned} -D \cdot x &= m \cdot \ddot{x} && (2) \\ m \cdot \ddot{x} + D \cdot x &= 0 && (3) \\ \ddot{x} + \frac{D}{m} \cdot x &= 0 && (4) \end{aligned}$$

Eine Lösung dieser DGL ist

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{5}$$

Hierbei ist

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{6}$$

die Grundfrequenz der Anordnung, die nur von der Federkonstanten D und der Masse m des Luftkissenfahrzeugs abhängt.

2.1.2 Freie, gedämpfte Schwingung

Die freie ungedämpfte Schwingung ist ein idealisierter Spezialfall. Im Allgemeinen tritt eine Dämpfung auf, so dass die Schwingungsamplitude mit der Zeit abnimmt. Bei einer zur Geschwindigkeit proportionalen Reibungskraft kann man die Gleichung 4 folgendermaßen erweitern

$$\ddot{x} + \frac{\eta}{m} \cdot \dot{x} + \frac{D}{m} \cdot x = 0 \tag{7}$$

Man definiert die Güte Q als

$$Q = \frac{\sqrt{Dm}}{\eta} \tag{8}$$

Somit erhält man schließlich die folgende lineare DGL:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot \frac{1}{Q} \cdot \dot{x} + \frac{D}{m} \cdot x &= 0 && (9) \\ \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x &= 0 && (10) \end{aligned}$$

Man kann drei Fälle unterscheiden:

- **Kriechfall**

  Ist $Q < \frac{1}{2}$, so handelt es sich um einen Kriechfall. Das System ist nicht schwingungsfähig. Lenkt man das Pendel aus, so bewegt es sich exponentiell wieder in die Ruhelage zurück.

- **Aperiodischer Grenzfall**

  Ist $Q = \frac{1}{2}$ spricht man von einem aperiodischen Grenzfall. Auch hier ist das System nicht schwingungfähig. Lenkt man das Pendel jedoch aus der Ruhelage aus, so kehrt es im Unterschied zum Kriechfall in der kürzest möglichen Zeit wieder in die Ruhelage zurück. Dieser Grenzfall findet immer dann eine Anwendung, wenn Schwingungen unerwünscht sind, zum Beispiel im Stoßdämpfer am Auto.

- **Schwingfall**

  Ist die Güte Q größer als $\frac{1}{2}$, so ist das System schwingungsfähig. Die DGL hat dann folgende Lösung:

  $$x(t) = x_0 \cdot \exp\left(\frac{\omega_0}{2Q} \cdot t\right) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \tag{11}$$

  Hierbei ist die Frequenz ω gegeben durch

  $$\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \tag{12}$$

  Die Frequenz ist also stehts kleiner als die Frequenz ω_0 bei der freien ungedämpften Schwingung. Bei hinreichend größer Güte gilt für zwei aufeinanderfolgende Maxima A der Amplitude:

  $$\ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) = \Lambda = \text{konst} = -\frac{Q}{\pi} \tag{13}$$

  Mit Hilfe des logarithmischen Dekrements Λ lässt sich also die Güte Q bestimmen.

2.1.3 Erzwungene Schwingung

Wirkt eine periodische Kraft $F_0 \cdot \cos(\omega t)$ von außen auf das gedämpfte schwingungsfähige System, so spricht man von einer erzwungen Schwingung. Es gilt die folgende Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot \frac{1}{Q} \cdot \dot{x} + \frac{D}{m} \cdot x \quad = \quad \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega t) \tag{14}$$

Als Lösung dieser Gleichung erhällt man

$$x(t) = A(\omega) \cdot \cos(\omega t - \Phi(\omega)) \tag{15}$$

Hierbei ist die Phasenverschiebung Φ sowie die Amplitude A von der Erregerfrequenz ω abhängig. Für die Phasenverschiebung A gilt:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} \tag{16}$$

Die Resonanzfrequenz ω_r, bei der $\frac{\partial A}{\partial \omega} = 0$ gilt, ist also

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \tag{17}$$

3 Versuchsdurchführung

Im Versuch werden zunächst die Eigenfrequenzen des Systems bei verschiedenen Dämpfungen gemessen. Danach werden in Abhängigkeit der Erregerfrequenz und der Dämpfungsstärke die Amplituden, sowie die Phasenverschiebung zwischen Erreger und Fahrbahngleiter bei einer Erzwungen Schwingung gemessen.

4 Auswertung

4.1 Resonanz

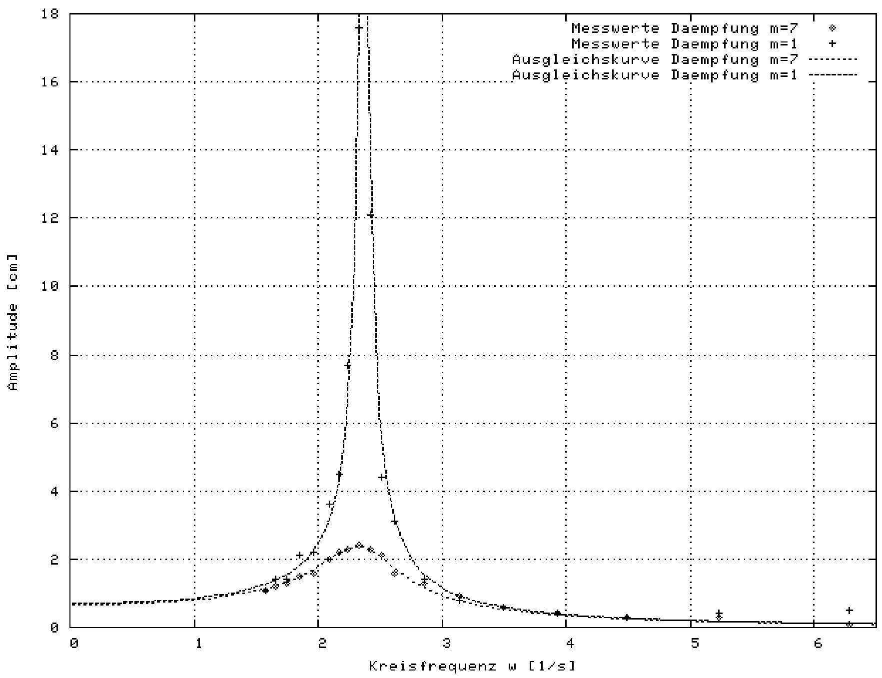

Abbildung 1: Resonanzkurve der Amplitude $A(\omega)$

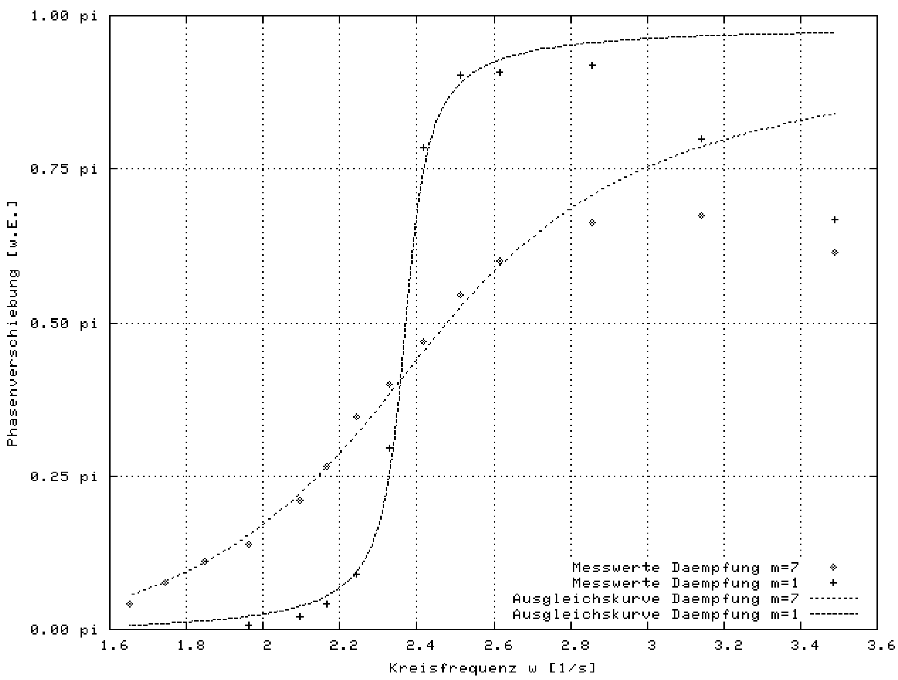

Abbildung 2: Resonanzkurve der Phasenverschiebung $\Phi(\omega)$

Mit Hilfe des bekannten Verlaufs der Funktion $A(\omega)$ ergaben sich folgende Werte für die Güte Q:

Dämpfung	$m = 7$	$m = 1$
Güte	$Q = 3.5$	$Q = 35.9$

Damit liegen die Werte aus dieser Messung um den Faktor 1.2 von den ersten Messwerten entfernt. Im Rahmen der Messunsicherheiten, die gerade bei den langen Einschwingzeiten nicht zu vernachlässigen sind, konnten wir also unsere erste Messung bestätigen.