

Praktikum II
TE: Thermische Emission
Betreuer: Waldemar Kaiser

Hanno Rein
praktikum2@hanno-rein.de

Florian Jessen
florian.jessen@student.uni-tuebingen.de

31. März 2004

1 Vorwort

Die Erzeugung von Elektronenstrahlen spielt eine große Rolle. Eine Möglichkeit nutzt die thermische Emission. Dieses Verfahren wird beispielsweise in den Röhren von Fernsehern und "älteren" PC-Monitoren verwendet.

2 Grundlagen

2.1 Kennlinie einer Glühdiode

Ab einer bestimmten Temperatur können Elektronen aus der heißen Kathode austreten. Da diese in der Regel einen Energieüberschuß haben, können sie ein schwaches Gegenfeld, gegeben durch eine Spannung U_G überwinden. Es gilt nun für den so entstehenden Anlaufstrom

$$I_A(U_G, T) = I_S(T) \cdot e^{-\frac{e \cdot U_G^{eff}}{k_B T}} \quad (1)$$

wobei k_B die Boltzmann-Konstante, e die Elementarladung, T die absolute Temperatur und $I_S(T) \equiv I_A(0, T)$ der temperaturabhängige Sättigungsstrom ist. Sorgt man nicht dafür, dass die Elektronen abgeführt werden, so entsteht um die Kathode eine Elektronenwolke, die weitere Elektronen daran hindert das Metall zu verlassen. Diesen Bereich der Kennlinie nennt man daher Raumladungsbereich. Den Sättigungsstrom erhält man aus der Richardson-Dushman-Gleichung:

$$I_S(T) = A_0 F T^2 \cdot e^{-\frac{W_k}{k_B T}} \quad (2)$$

A_0 ist dabei eine Konstante und F die Oberfläche der Kathode.

2.2 Bestimmung der Kathoden-Temperatur aus der Kennlinie

Die Temperatur der Kathode lässt sich mit den bekannten Größen nur aus dem Anlaufbereich bestimmen. Es gilt hier nach (1) und (2)

$$I_A(U_G, T) = A_0 F T^2 \cdot e^{-\frac{W_k}{k_B T}} \cdot e^{-\frac{e \cdot U_G^{eff}}{k_B T}} \quad (3)$$

Da durch Angleichung der Fermi-Niveaus von Anode und Kathode eine Kontaktspannung auftritt, wird die Messung verfälscht. Es gilt jedoch

$$e \cdot U_G^{eff} = e \cdot U_G - W_K + W_A \quad (4)$$

Ein weiterer Fehler tritt durch den Innenwiderstand des Amperemeters auf. Dieser wird wie folgt korrigiert

$$U_G = U_{G, Mess} + R_{Amperemeter} \cdot I_A \quad (5)$$

Berücksichtigt man nun die Korrekturen nach (4) und (5), so erhält man

$$I_A(U_G, T) = A_0 F T^2 \cdot e^{-\frac{e \cdot U_G + W_A}{k_B T}} \quad (6)$$

beziehungsweise

$$\ln I_A(U_G, T) = \ln A_0 F T^2 - \frac{W_A}{k_B T} - \frac{e \cdot U_G}{k_B T} \quad (7)$$

Das bedeutet, dass im logarithmischen Diagramm die Kurve zu einer Geraden wird, deren Steigung durch

$$m = -\frac{e}{k_B T} \quad (8)$$

gegeben ist.

2.3 Bestimmung der Anoden-Austrittsarbeit

Ist die Temperatur der Kathode bekannt, so lässt sich mit Hilfe von (6) die Anoden-Austrittsarbeit berechnen

$$W_A = k_B T \cdot \ln \left(\frac{A_0 F T^2}{I_A(0, T)} \right) \quad (9)$$

2.4 Schottky Effekt

Erhöht man die elektrische Feldstärke E auf Werte $|E| > 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$, so stellt man fest, dass der Emissionsstrom weiter steigt, obwohl das Sättigungsplateau des Stroms bereits erreicht wurde. Die tatsächlich zu überwindende Austrittsarbeit W der Elektronen wird bei starken elektrischen Feldern verringert. Dies hat folgende Gründe:

- Ist ein Elektron bereits außerhalb des Metalls, so wirkt auch dort noch eine rücktreibende Kraft F_B . Die Kraft wird Bildkraft genannt und rührt daher, dass das Elektron auf der Metalloberfläche positive Ladungen induziert. Das elektrische Feld verhält sich so, also ob sich eine positive Ladung e^+ im Metall befindet:

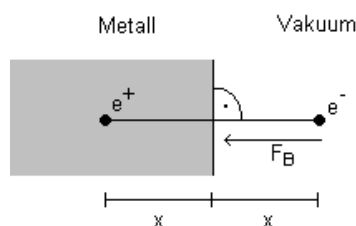


Abbildung 1: Spiegelladung durch Influenz bewirkt Bildkraft

Die Ladung wird somit durch die Coulombkraft zum Metall zurück gezogen:

$$F_B = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (10)$$

$$= -\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} \quad (11)$$

Somit ist das Bildkraftpotential $W_B(x)$

$$W_B(x) = W_0 - W_{Blind} = W_0 - \int_x^\infty -\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} dx \quad (12)$$

$$= W_0 - \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x} \quad (13)$$

- Hinzu kommt noch das äußere Feld E , das die potentielle Energie $W_E(x) = -eEx$ liefert.

Überlagert man beide Effekte, so gilt für die Austrittsarbeit in Abhängigkeit des Abstandes:

$$W(x) = W_E(x) + W_B(x) \quad (14)$$

$$= -eEx + W_0 - \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x} \quad (15)$$

Der Abstand x_{max} bei dem die Austrittsarbeit maximal ist, folgt aus der Bedingung

$$\frac{dW(x)}{dx} = -eE + \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} = 0 \quad (16)$$

$$x_{max} = \sqrt{\frac{e}{16\epsilon_0 \pi E}} \quad (17)$$

Somit ist die maximale Austrittsarbeit, die es zu überwinden gilt:

$$W_{max} = W_0 - W(x_{max}) = W_0 - \sqrt{\frac{e^3 E}{4\epsilon_0 \pi}} \quad (18)$$

Man sieht, dass ein starkes elektrisches Feld, die Austrittsarbeit erniedrigt. Dies führt zu der beobachtbaren Erhöhung des Emissionsstroms:

$$I_s(T, E) = AFT^2 \exp\left(-\frac{W_A}{k_B T}\right) \quad (19)$$

$$= AFT^2 \exp\left(-\frac{W_0 - \sqrt{\frac{e^3 E}{4\epsilon_0 \pi}}}{k_B T}\right) \quad (20)$$

$$= AFT^2 \exp\left(-\frac{W_0}{k_B T}\right) \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{\frac{e^3 E}{4\epsilon_0 \pi}}}{k_B T}\right) \quad (21)$$

$$I_s(T, E) = I_s(T, E = 0) \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{\frac{e^3 E}{4\epsilon_0 \pi}}}{k_B T}\right) \quad (22)$$

2.5 Grauer Strahler - Schwarzer Strahler

Ein schwarzer Strahler ist ein Körper, der alle auf ihn einfallende Strahlung absorbiert. Es gilt daher für das Absorptionsvermögen

$$A = \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie}}{\text{auftreffende Strahlungsenergie}} = 1 \quad (23)$$

Gleichzeitig wird Energie mit einem charakteristischen Spektrum auch abgestrahlt und es stellt sich ein thermisches Gleichgewicht ein. Der schwarze Strahler kann durch einen Hohlraumstrahler realisiert werden. Um die Gesamtenergie eines solchen Körpers zu bestimmen, integriert man über alle abgestrahlten Wellenlängen und erhält

$$L^S(T) = \frac{\sigma_{SB}}{\pi} T^4 \quad (24)$$

und das Stefan-Boltzmann Gesetz

$$M^S(T) = \sigma_{SB} \cdot T^4 \quad (25)$$

Dabei ist $\sigma_{SB} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ die Stefan-Boltzmann-Konstante. Graue Strahler haben ein geringeres Absorptionsvermögen:

$$M^S(T) = \epsilon \cdot \sigma_{SB} \cdot T^4 \quad (26)$$

3 Auswertung

3.1 Messungen

Zu drei gegebenen Heizströmen wurde die Kennlinie der Glühdiode im Anlaufbereich ausgemessen. Es ergeben sich die folgenden Diagramme mit den Ausgleichskurven der Form $\exp(m \cdot x + c)$. Dabei wurden die Randwerte nicht berücksichtigt, da hier Fehler durch die Erwärmung der Anode, sowie durch die Raumladungen auftreten. Die Kathodentemperatur wurde nach (8) bestimmt, der zugehörige Fehler über die Fehlerfortpflanzung nach

$$\Delta T = \frac{\partial}{\partial m} T \cdot \Delta m = \frac{e}{k_B \cdot m^2} \cdot \Delta m$$

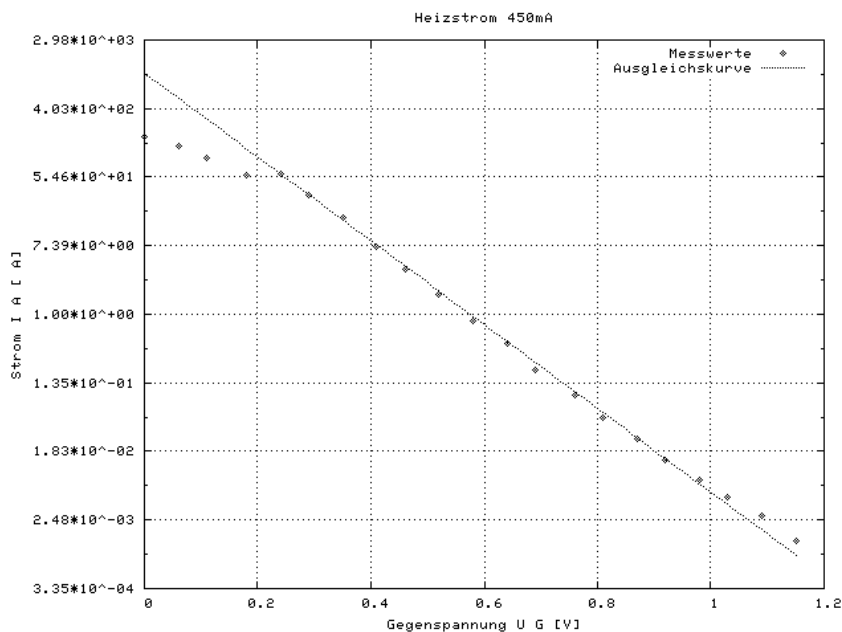


Abbildung 2: Heizstrom 450 mA

$m = -12.2314 \pm 0.2158$, $c = 7.0381 \pm 0.06671$
 Kathodentemperatur $(949.09 \pm 16, 74)K$

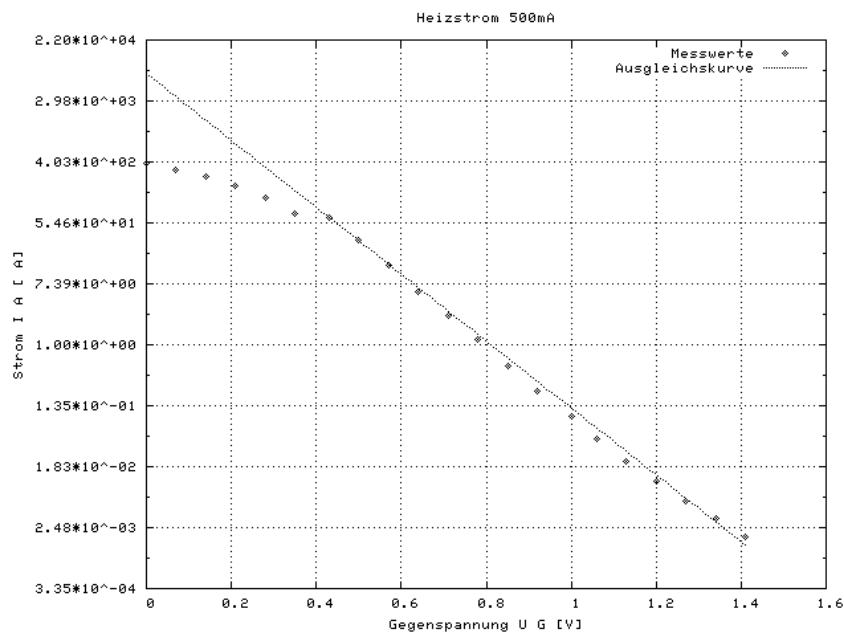


Abbildung 3: Heizstrom 500 mA

$m = -10.9717 \pm 0.1773, c = 8.8999 \pm 0.07943$
 Kathodentemperatur $(1058.06 \pm 17, 10)K$

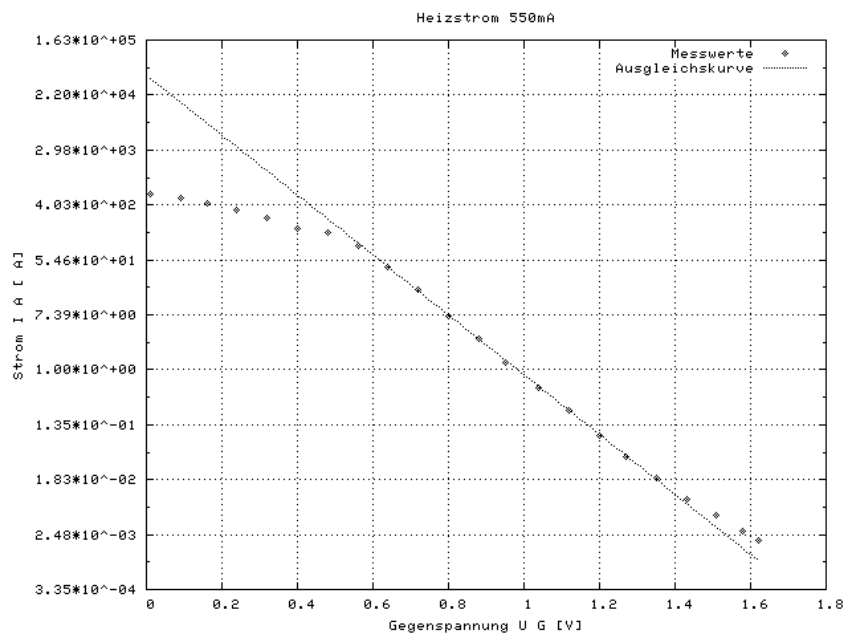


Abbildung 4: Heizstrom 550 mA

$m = -10.8972 \pm 0.1504, c = 10.7193 \pm 0.09811$
 Kathodentemperatur $(1065.29 \pm 14, 70)K$

Die Austrittsarbeit an der Anode wurde gemäß (9) berechnet. Der Fehler ergibt sich mit

$$\Delta W_A = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial T} W_A \cdot \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial I_A(0, T)} W_A \cdot \Delta I_A\right)^2}$$

Für $I_S(0, T)$ wurde der Schnittpunkt der Ausgleichskurve mit der Ordinate berechnet, um die Randeffekte zu eliminieren.

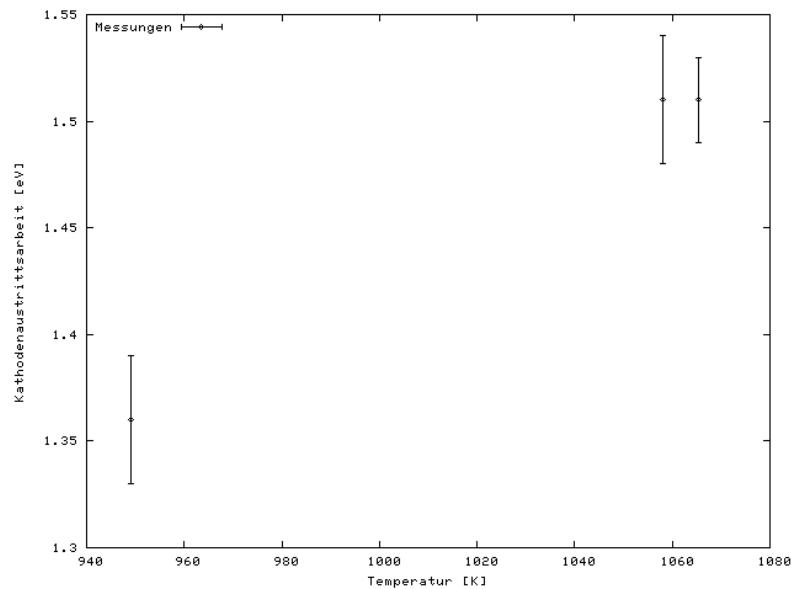


Abbildung 5: Austrittsarbeit

Man erkennt deutlich, dass im Rahmen der Messunsicherheiten nur eine geringe Temperaturabhängigkeit feststellbar ist.

| Heizstrom [mA] | Kathodentemperatur [K] | Austrittsarbeit [eV] |
|----------------|------------------------|----------------------|
| 450 | 949.09 ± 1.74 | 1.36 ± 0.03 |
| 500 | 1058.06 ± 17.10 | 1.51 ± 0.03 |
| 550 | 1065.29 ± 14.70 | 1.51 ± 0.02 |

3.2 Emissionswirkungsgrad

Im Folgenden soll der Emissionswirkungsgrad einer Wolfram- und einer Oxidkathode bestimmt werden. Der Emissionswirkungsgrad ist wie folgt definiert

$$\eta = \frac{\text{Emissionsstrom}}{\text{Heizleistung}} = \frac{I_S}{P_H} \quad (27)$$

Mit der Richardson-Gleichung und dem Boltzmann-Gesetz ergibt sich

$$I_S(T) = A_R F T^2 \cdot e^{-\frac{W_K}{k_B T}} \quad (28)$$

$$P = \epsilon \sigma F T^4 \quad (29)$$

$$\eta = \frac{A_R \cdot e^{-\frac{W_K}{k_B T}}}{\epsilon \sigma T^2} \quad (30)$$

Dabei ist ϵ der spektrale Emissionsgrad des Körpers, $\sigma = 5.6705 \cdot 10^{-12} \frac{W}{cm^2 K^4}$ die Konstante des Stefan-Boltzmann-Gesetzes, F die Fläche der Kathode und A_R wiederum eine Materialkonstante. Um hiermit den Emissionswirkungsgrad zu bestimmen, muss die Temperatur der Kathode bekannt sein. Man erhält diese aus der geforderten Stromdichte mit Hilfe der Richardson-Dushman-Gleichung

$$j_s = C_{RD} T^2 \cdot e^{-\frac{W_K}{k_B T}} \quad (31)$$

$$\ln j_s - \ln C_{RD} = 2 \ln T - \frac{W_K}{k_B T} \quad (32)$$

$C_{RD} = A_R = 60 \frac{A}{cm^2 K^2}$ ist hierbei die Richardson-Dushman-Konstante. Betrachtet man diese Gleichung als Funktion von T , so muss gelten

$$2 \ln T - \frac{W_K}{k_B T} - \ln j_s + \ln C_{RD} = f(T) = 0 \quad (33)$$

$$(34)$$

D.h. man muss eine Nullstelle bestimmen. Ein geeignetes numerisches Verfahren stammt von Newton. Die Ableitung der Funktion lautet

$$\frac{d}{dT} f(T) = \frac{2}{T} + \frac{W_K}{k_B T^2} \quad (35)$$

Man erhält so für die Wolfram Kathode eine Temperatur von $T_{Wolfram} = 2656.85K$. Damit ist der Emissionswirkungsgrad bestimmt zu $\eta_{Wolfram} = 7.015 \cdot 10^{-3} \frac{A}{W}$. Analog kann die Rechnung für die Oxidkathode durchgeführt werden. Man erhält $T_{Oxi} = 1183.48K$ und $\eta_{Oxi} = 236.569 \cdot 10^{-3} \frac{A}{W}$.

Anhang - Original Messdaten

Heizstrom 450mA

| U [mV] | I [μ A] | Messbereich [Ohm] | U [V] korrigiert |
|--------|--------------|-------------------|------------------|
| 1150 | 0.00135 | 100000 | 1.15 |
| 1090 | 0.0028 | 100000 | 1.09 |
| 1030 | 0.0048 | 100000 | 1.03 |
| 977 | 0.00785 | 100000 | 0.98 |
| 920 | 0.014 | 100000 | 0.92 |
| 863 | 0.026 | 100000 | 0.87 |
| 805 | 0.0498 | 100000 | 0.81 |
| 748 | 0.0941 | 100000 | 0.76 |
| 690 | 0.2 | 10000 | 0.69 |
| 631 | 0.42 | 10000 | 0.64 |
| 575 | 0.81 | 10000 | 0.58 |
| 518 | 1.82 | 1000 | 0.52 |
| 461 | 3.65 | 1000 | 0.46 |
| 402 | 7.26 | 1000 | 0.41 |
| 345 | 16.5 | 100 | 0.35 |
| 287 | 32.6 | 100 | 0.29 |
| 230 | 59.4 | 100 | 0.24 |
| 175 | 58 | 10 | 0.18 |
| 114 | 96 | 10 | 0.11 |
| 57 | 135 | 10 | 0.06 |
| 0 | 178 | 10 | 0.00 |

Heizstrom 500mA

| U [mV] | I [μ A] | Messbereich [Ohm] | U [V] korrigiert |
|--------|--------------|-------------------|------------------|
| 1409 | 0.0018 | 100000 | 1.41 |
| 1340 | 0.0034 | 100000 | 1.34 |
| 1269 | 0.006 | 100000 | 1.27 |
| 1198 | 0.0114 | 100000 | 1.20 |
| 1128 | 0.022 | 100000 | 1.13 |
| 1058 | 0.045 | 100000 | 1.06 |
| 987 | 0.0945 | 100000 | 1.00 |
| 917 | 0.22 | 10000 | 0.92 |
| 845 | 0.496 | 10000 | 0.85 |
| 776 | 1.18 | 1000 | 0.78 |
| 705 | 2.64 | 1000 | 0.71 |
| 635 | 5.77 | 1000 | 0.64 |
| 568 | 13.8 | 100 | 0.57 |
| 493 | 31.4 | 100 | 0.50 |
| 423 | 65.2 | 100 | 0.43 |
| 351 | 74 | 10 | 0.35 |
| 280 | 126 | 10 | 0.28 |
| 211 | 185 | 10 | 0.21 |
| 141 | 249 | 10 | 0.14 |
| 71 | 317 | 10 | 0.07 |
| 0 | 390 | 10 | 0.00 |

Heizstrom 550mA

| U [mV] | I [μ A] | Messbereich [Ohm] | U [V] korrigiert |
|--------|--------------|-------------------|------------------|
| 1623 | 0.002 | 100000 | 1.62 |
| 1583 | 0.0028 | 100000 | 1.58 |
| 1509 | 0.005 | 100000 | 1.51 |
| 1433 | 0.009 | 100000 | 1.43 |
| 1351 | 0.019 | 100000 | 1.35 |
| 1270 | 0.0417 | 100000 | 1.27 |
| 1191 | 0.091 | 100000 | 1.20 |
| 1113 | 0.229 | 10000 | 1.12 |
| 1032 | 0.51 | 10000 | 1.04 |
| 953 | 1.27 | 1000 | 0.95 |
| 872 | 3.06 | 1000 | 0.88 |
| 794 | 6.89 | 1000 | 0.80 |
| 715 | 18.2 | 100 | 0.72 |
| 635 | 42.2 | 100 | 0.64 |
| 555 | 90.4 | 100 | 0.56 |
| 475 | 147 | 10 | 0.48 |
| 397 | 171 | 10 | 0.40 |
| 313 | 250 | 10 | 0.32 |
| 236 | 331 | 10 | 0.24 |
| 156 | 420 | 10 | 0.16 |
| 81 | 509 | 10 | 0.09 |
| 0 | 607 | 10 | 0.01 |