Praktikum I SA
Saitenschwingungen

Hanno Rein

Betreuer: Tobias Donner

16. November 2003

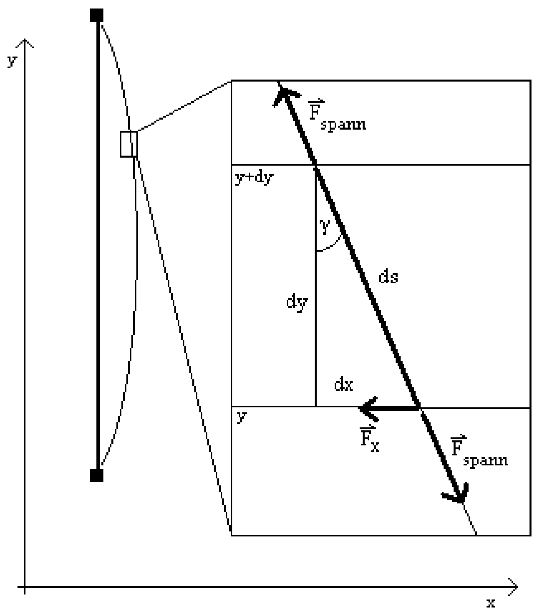
1 Ziel der Versuchsreihe

Schwingungen sind eine der elementarsten Erscheinungen in der Physik. Von einer Schwingung eines Teilchens kommt man mit Hilfe von Kopplungen benachbarter Teilchen zur Welle. Prinzipiell lässt sich alles vom Licht bis hin zur Materiewelle als Welle interpretieren. In diesem Versuch geht es nun darum, ein grundlegendes Verständnis von Schwingungen und Wellen an Hand einer Saitenschwingung zu erlangen.

2 Grundlagen

Transversalwellen bei Saiten

Eine Saite ist mit der Kraft F_{Spann} auf der Länge l fest eingespannt. Nun wird die Saite um ein, im Verhältnis zu ihrer Länge kleinem, Stück x ausgelenkt.



Die Skizze ergibt für die rücktreibende Kraft, für ein infinitesimal kleines Längenstück ds

$$dF_x = (F_{Spann} \sin\gamma)_{y+dy} - (F_{Spann} \sin\gamma)_y \quad (1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(F_{Spann} \sin\gamma)dy \quad (2)$$

Für kleine Auslenkungen und somit kleine Winkel gelten die Näherungen

$$\sin\gamma = \gamma = \tan\gamma = \frac{\partial x}{\partial y} \tag{3}$$

und somit

$$dF_x = F_{Spann}\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}dy \tag{4}$$

Im folgenden sei die Masse pro Längeneinheit $\mu = \frac{\partial m}{\partial y}$. Mit der Newtonschen Grundgleichung $F = ma$ und der Näherung $ds = dy$ ergibt sich folgende Differnzialgleichung

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = F_{Spann}\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}dy \tag{5}$$

$$\mu\ dy\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = F_{Spann}\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}dy \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{\mu}{F_{Spann}}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tag{7}$$

Die Lösungen dieser DGL haben die Form

$$x = u(y + ct) \tag{8}$$

Somit ist nach Kettenregel:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial(y+ct)} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial(y+ct)} \tag{10}$$

Gleichung (11) und (12) in (9) eingesetzt ergibt für die Ausbreitungsgeschwindigkeit c folgender Zusammenhang zur Spannkraft und der Massendichte der Saite

$$c = \sqrt{\frac{F_{Spann}}{\mu}} \tag{11}$$

3 Versuchsdurchführung

Bei dem vorliegenden Versuch beobachten wir die Transversalwellen an einer gespannten Saite. Die eine Seite der Saite ist an einem Lautsprecher fest montiert. Dieser wird durch einen Frequenzgenerator angesteuert und schwingt harmonisch. Der Lautsprecher regt dann die Saite zu Schwingungen an. An der andere Seite der Saite ist über eine Umlenkrolle ein Gewicht bekannter Masse aufgehängt. Die Erdbeschleunigung zieht das Gewicht nach unten und spannt somit die Saite. Die Spannkraft lässt sich also mit $F_{Spann} = G = mg$ berechnen. Eine verschiebbare Klemme ermöglicht das Verkürzen der Saitenlänge.

Nun wird versucht bei insgesamt 3 verschiedenen Spannungen und 3 verschiedenen Saitenlängen möglichst viele Eigenschwingungen durch Variation der Frequenz des Erregers zu erreichen. Eine Eigenschwingung erkennt man an der großen Amplitude der Saite.

4 Auswertung

4.1 Kraftabhängigkeit

Die folgenden Schaubilder stellen die gemessenen Frequenzen als Funktion der Nummer der Eigenschwingung dar. Außerdem wurde jeweils eine Ausgleichsgerade durch den Koordinatenursprung berechnet.

Nach der Gaussschen Fehlerfortpflanzung ergibt sich für den zufälligen Fehler der Ausbreitungsgeschwindigkeit

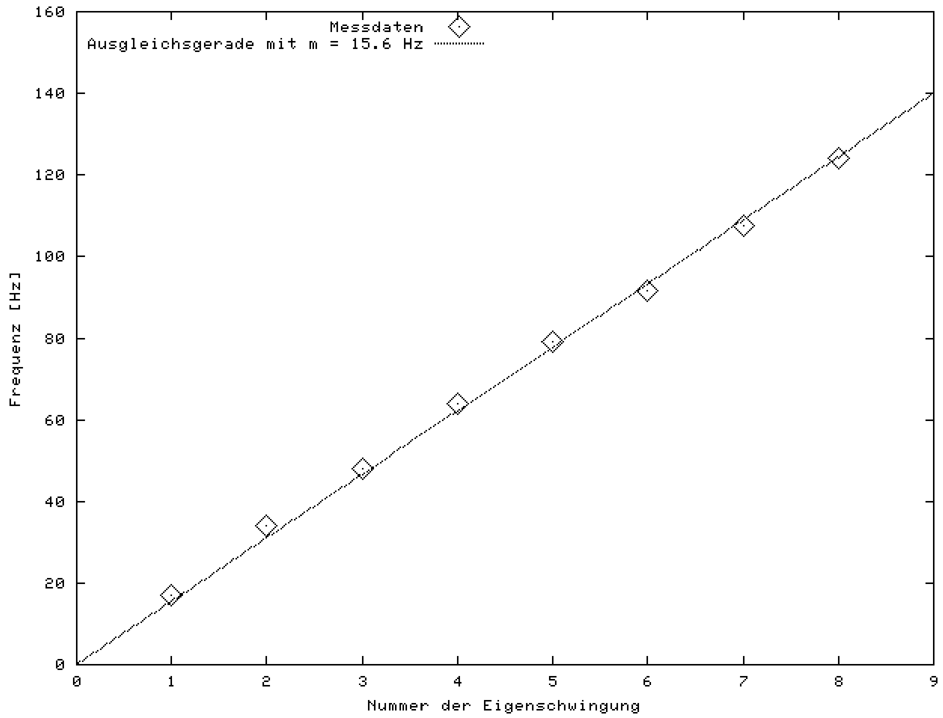
$$\sigma_c = |\lambda \sigma_f| \tag{12}$$

Für den zufälligen Fehler der Massenbelegung ergibt sich

$$\sigma_\mu = \left|\frac{\partial \mu}{\partial c}\sigma_c\right| = \left|-\frac{1}{2}\frac{F}{c^3}\sigma_c\right| \tag{13}$$

4.1.1 Masse m_1

Für die Masse $m_1 = 99.4g$ ergibt sich folgendes Schaubild mit der Ausgleichsgeraden $g(n) = 15.6\text{Hz} \cdot n$. Die gemittelte Frequenz der ersten Eigenschwingung ist somit $f_1 = 15.6\text{Hz}$.



Die Länge der Saite ist $l_1 = 77.5cm$. Diese Länge entspicht genau einer halber Wellenlänge λ. Die Wellenlänge ist somit $\lambda_1 = 2l_1 = 1.55m$. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit ergibt sich

$$\bar{c}_1 = \lambda \cdot f = \lambda_1 \cdot \bar{f}_1 = 24.18ms^{-1} \tag{14}$$

$$\sigma_{c1} = 1.023ms^{-1} \tag{15}$$

Die Kraft F mit der die Saite gespannt wird ist:

$$F_1 = m_1 \cdot g = 0.0994kg \cdot 9.81ms^{-2} = 0.976N \tag{16}$$

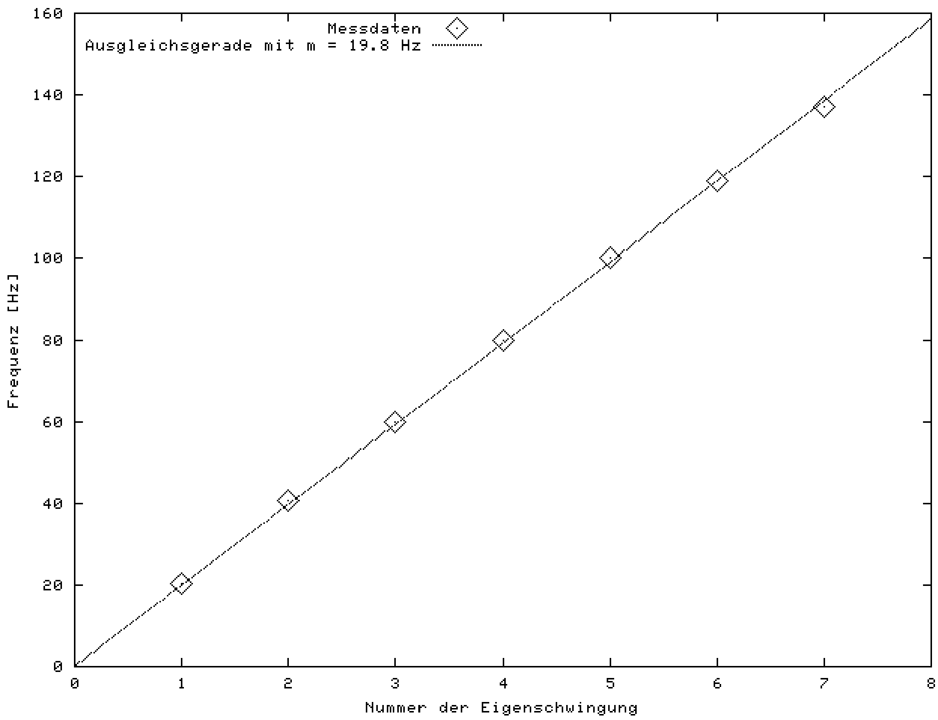
Somit ist die Massenbelegung μ der Seite

$$\bar{\mu}_1 = \frac{F_1}{{c_1}^2} = 1.67gm^{-1} \tag{17}$$

$$\sigma_{\mu 1} = 3.53 \cdot 10^{-2}gm^{-1} \tag{18}$$

4.1.2 Masse m_2

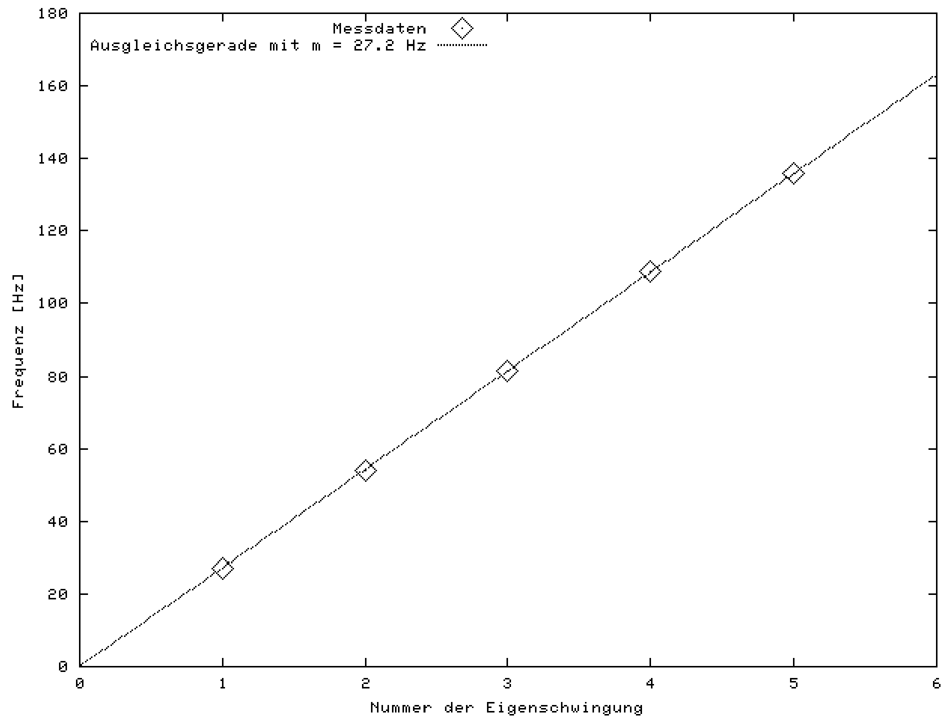
Für die Masse $m_2 = 149.6g$ ergibt sich folgendes Schaubild mit der Ausgleichsgeraden $g(n) = 19.8\text{Hz} \cdot n$. Die gemittelte Frequenz der ersten Eigenschwingung ist $f_2 = 19.8\text{Hz}$.



$$\begin{aligned}
\bar{f}_2 &= 19.8Hz && (19)\\
\sigma_{f2} &= 0.22Hz && (20)\\
\bar{c}_2 &= \lambda \cdot f = 2l_1\bar{f}_2 = 30.69ms^{-1} && (21)\\
\sigma_{c2} &= 0.34ms^{-1} && (22)\\
F_2 &= m_2 \cdot g = 1.468N && (23)\\
\bar{\mu}_2 &= \frac{F_2}{{c_2}^2} = 2.51gm^{-1} && (24)\\
\sigma_{\mu 2} &= 8.63 \cdot 10^{-3}gm^{-1} && (25)
\end{aligned}$$

4.1.3 Masse m_3

Für die Masse $m_3 = 299.8g$ ergibt sich folgendes Schaubild mit der Ausgleichsgeraden $g(n) = 27.2\text{Hz} \cdot n$. Die gemittelte Frequenz der ersten Eigenschwingung ist $f_3 = 27.2\text{Hz}$.



$$\bar{f}_3 = 27.2Hz \quad (26)$$
$$\sigma_{f3} = 0.11Hz \quad (27)$$
$$\bar{c}_3 = \frac{l_1}{2}\bar{f}_3 = 42.16ms^{-1} \quad (28)$$
$$\sigma_{c3} = 0.17ms^{-1} \quad (29)$$
$$F_3 = m_3 \cdot g = 2.941N \quad (30)$$
$$\bar{\mu}_3 = \frac{F_3}{{c_3}^2} = 1.65gm^{-1} \quad (31)$$
$$\sigma_{\mu 3} = 3.34 \cdot 10^{-3}gm^{-1} \quad (32)$$

4.2 Massenbelegung

Für den Mittelwert $\bar{\mu}$ der Massenbelegung ergibt sich

$$\bar{\mu} = 1.94gm^{-1} \quad (33)$$

Wie man an den Messwerten leicht erkennt, liegt vermutlich bei der Messung mit der Masse m_2 ein systematischer Fehler vor. Ohne diesen Wert ergibt der Mittelwert

$$\bar{\mu}_2 = 1.66gm^{-1} \quad (34)$$

4.3 Zusammenhang von Grundfrequenz und Saitenlänge

Nun wird die Saitenlänge l bei konstanter Spannkraft F_{Spann} variiert. Für die gemittelten Grundfrequenzen aus 3 Eigenschwingungen ergeben sich folgende Messwerte

Saitenlänge l	Grundfrequenz f	$l \cdot f$ (ohne Einheit)
$l_4 = 61.2cm$	$f_4 = 34.2Hz$	2093
$l_5 = 52.0cm$	$f_5 = 39.8Hz$	2070
$l_6 = 29.5cm$	$f_6 = 72.1Hz$	2127

Da der Faktor $l \cdot f$ für alle Wertepaare von l und f hinreichend konstant bleibt, ist $f \sim \frac{1}{l}$.