

Praktikum II
RE: Elektrische Resonanz
Betreuer: Dr. Torsten Hehl

Hanno Rein
praktikum2@hanno-rein.de

Florian Jessen
florian.jessen@student.uni-tuebingen.de

29. März 2004

1 Grundlagen

1.1 Komplexe Wechselstromrechnung

Ein rein ohmscher Widerstand hat in der komplexen Wechselstrom Rechnung keinen Imaginäranteil. Gleichstrom- und Wechselstromwiderstand sind identisch

$$Z_R = R$$

Die Impedanzen einer idealen¹ Spule, sowie eines Kondensators haben keinen Realanteil.

- Impedanz Z_L einer Spule mit der Induktivität L :

$$Z_L = i\omega L$$

- Impedanz Z_C eines Kondensators mit der Kapazität C :

$$Z_C = \frac{-i}{\omega C}$$

Die Vorzeichen kommen dadurch zustande, dass der Strom der Spannung beim Kondensator vorausseilt, und bei der Spule hinterherläuft. Bei einer Rotation der Spannung $U = \hat{U}e^{i\omega t}$ im mathematisch positiven Sinne erhält man mit obigen Vorzeichen und des ohmschen Gesetzes (komplexer Rechnung) das gewünschte Ergebnis.

1.2 Resonanz

Resonanz bezeichnet die Übereinstimmung der Frequenz der Anregung mit der Eigenfrequenz des angeregten Systems. Hierbei wird die Amplitude der Schwingung maximal. In unserem Fall bedeutet dies, dass der Wechselstromwiderstand des Systems minimal wird. Dies erreicht man, wenn die Phasenverschiebung gleich null ist. In einem idealen System ohne ohmschen Widerstand wird die Amplitude bei der Resonanzfrequenz unendlich groß.

1.3 Formale Berechnung von Wechselstromwiderstand, Phasenwinkel und Resonanzfrequenz

1.3.1 Resonanzkreis 1

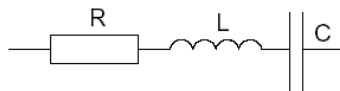


Abbildung 1: Serienschwingkreis

In diesem Beispiel addieren sich alle drei Impedanzen auf. Es gilt somit für den resultierenden Wechselstromwiderstand $|Z|$:

$$|Z| = \left| R + i\omega L + \frac{-i}{\omega C} \right| \quad (1)$$

$$= \left| R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right| \quad (2)$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (3)$$

¹kein ohmscher Widerstand

Für den Phasenwinkel φ gilt:

$$\tan \varphi = \frac{\Im Z}{\Re Z} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (4)$$

Die Resonanzfrequenz ω_0 ist durch folgende Bedingung gegeben:

$$\varphi = 0 \quad (5)$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (6)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (7)$$

1.3.2 Resonanzkreis 2

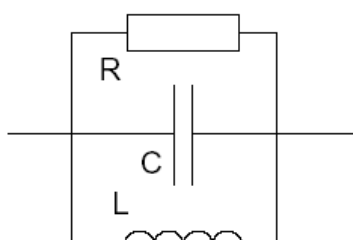


Abbildung 2: Parallelkreis 1. Ordnung

In diesem Beispiel addieren sich alle drei Admittanzen² zur Gesamtadmittanz Y auf:

$$|Y| = \left| \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + \frac{\omega C}{-i} \right| \quad (8)$$

$$= \left| \frac{1}{R} + \frac{1}{i} \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right| \quad (9)$$

$$= \left| \frac{1}{R} + i \left(\frac{-1}{\omega L} + \omega C \right) \right| \quad (10)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \quad (11)$$

Somit ergibt sich für den resultierenden Wechselstromwiderstand $|Z|$:

$$|Z| = \left| \frac{1}{Y} \right| \quad (12)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}} \quad (13)$$

$$= \frac{\omega LR}{\sqrt{L^2\omega^2 + \omega^4 C^2 L^2 R^2 - 2CL\omega^2 R^2 + R^2}} \quad (14)$$

$$(15)$$

Für den Phasenwinkel φ gilt:

$$\tan \varphi = \frac{\Im Z}{\Re Z} = -\frac{\Im Y}{\Re Y} = -R \cdot \left(\frac{-1}{\omega L} + \omega C \right) = \frac{R}{\omega L} - R\omega C \quad (16)$$

Die Resonanzfrequenz ω_0 ist wiederum durch folgende Bedingung gegeben:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (17)$$

²Kehrwert der Impedanz

1.3.3 Resonanzkreis 3

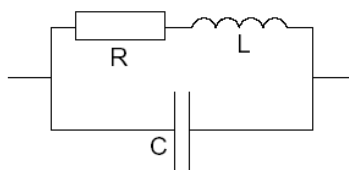


Abbildung 3: Parallelkreis 2. Ordnung

Im letzten Beispiel addieren sich zunächst die zwei Impedanzen im oberen Ast zu Z_1 . Danach lässt sich die Gesamtimpedanz Z berechnen, indem man die Admittanzen des oberen (Y_1) und des unteren (Y_2) Asts zur Gesamtadmittanz Y aufsummiert und davon den Kehrwert berechnet. Es gilt somit:

$$Z_1 = R + i\omega L \quad (18)$$

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (19)$$

$$Z_2 = \frac{-i}{\omega C} \quad (20)$$

$$Y_2 = \frac{\omega C}{-i} = i\omega C \quad (21)$$

$$Y = i\omega C + \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (22)$$

$$= \frac{i\omega C (R^2 + \omega^2 L^2) + R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (23)$$

$$= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) \quad (24)$$

$$Z = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{i\omega C (R^2 + \omega^2 L^2) + R - i\omega L} \quad (25)$$

Somit ist der Wechselstromwiderstand $|Z|$:

$$|Z| = \frac{1}{|Y|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2}} \quad (26)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \omega^2 C^2 + \frac{\omega^2 L^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} - 2\omega C \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}} \quad (27)$$

$$= \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\sqrt{R^2 + \omega^2 C^2 (R^2 + \omega^2 L^2)^2 + \omega^2 L^2 - 2\omega^2 C L (R^2 + \omega^2 L^2)}} \quad (28)$$

$$= \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\sqrt{R^2 + (\omega C (R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L)^2}} \quad (29)$$

Für den Phasenwinkel φ gilt:

$$\tan \varphi = \frac{\Im Z}{\Re Z} = -\frac{\Im Y}{\Re Y} = -\frac{\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}{\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (30)$$

$$= \frac{\omega L - \omega C (R^2 + \omega^2 L^2)}{R} \quad (31)$$

Um die Resonanzfrequenz ω_0 zu erreichen, muss die Phasenverschiebung φ wiederum null sein. Also ist auch der Imaginärteil der Admittanz Y null. Dies ist der Fall wenn folgendes gilt:

$$\varphi = 0 \quad (32)$$

$$\tan \varphi = 0 \quad (33)$$

$$\omega L - \omega C (R^2 + \omega^2 L^2) = 0 \quad (34)$$

Die Lösung $\omega = 0$ fällt aus physikalischen Gründen weg, da es dabei nicht mehr um einen Schwingungsvorgang handeln würde. Somit ist die eigentliche Resonanzfrequenz ω_0 :

$$R^2 + \omega_0^2 L^2 = \frac{L}{C} \quad (35)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} \quad (36)$$

2 Auswertung

2.1 Fehlerrechnung

2.1.1 Phasenwinkel

Für den Phasenwinkel φ gilt:

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a} \quad (37)$$

Der zufälligen Fehler beim Ablesen der Ellipsen-Halbachsen a und b wird auf $\Delta s = 1.5\text{mm}$ geschätzt. Somit ergibt sich für den zufälliger Fehler des Phasenwinkels φ nach der Gausschen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta\varphi = \sqrt{\left(\Delta s \cdot \frac{\partial}{\partial a}\varphi\right)^2 + \left(\Delta s \cdot \frac{\partial}{\partial b}\varphi\right)^2} \quad (38)$$

$$= \Delta s \cdot \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (39)$$

$$= \frac{3\text{mm}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (40)$$

2.1.2 Impedanz

Für den systematischen Fehler $\Delta\xi$ der Bauteile nehmen wir ein Prozent des Nennwerts an. Es ist:

$$|Z| = \frac{U}{I} \quad (41)$$

$$= \frac{U_x \cdot R}{U_y} \quad (42)$$

$$= \frac{p_x X_0}{p_y Y_0} R \quad (43)$$

$$(44)$$

Da die Ellipse in ein Quadrat eingepasst wurde, gilt stets $X_0 = Y_0$. Somit gilt für den systematischen Fehler der Impedanz:

$$\Delta|Z| = \Delta s \cdot \left| \frac{\partial}{\partial X_0} Z \right| + \Delta s \cdot \left| \frac{\partial}{\partial Y_0} Z \right| + 1\% \cdot R \cdot \left| \frac{\partial}{\partial R} Z \right| \quad (45)$$

$$= \frac{p_x}{p_y X_0} (2 \cdot |R\Delta s| + 0.01 \cdot X_0 \cdot R) \quad (46)$$

$$= \frac{p_x R}{p_y X_0} (3\text{mm} + 0.01 \cdot X_0) \quad (47)$$

2.2 Serienschwingkreis

Der theoretische Wert der Resonanzfrequenz ist

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC} \cdot 2\pi} = 3946\text{Hz} \tag{48}$$

Unsere Messwerte ergaben folgende Abhängigkeiten des Phasenwinkels und der Impedanz von der Frequenz:

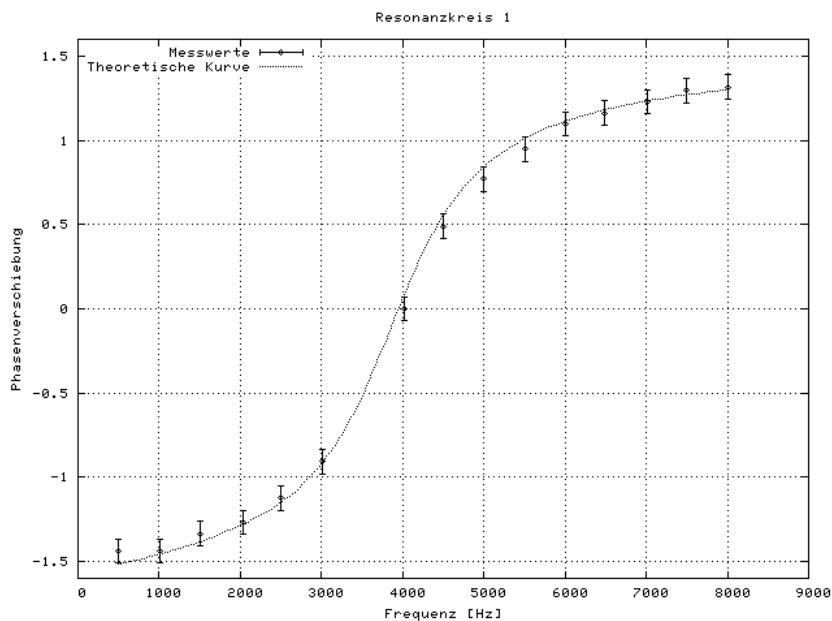


Abbildung 4: Phasenwinkel in Abhängigkeit der Frequenz (Serienschwingkreis)

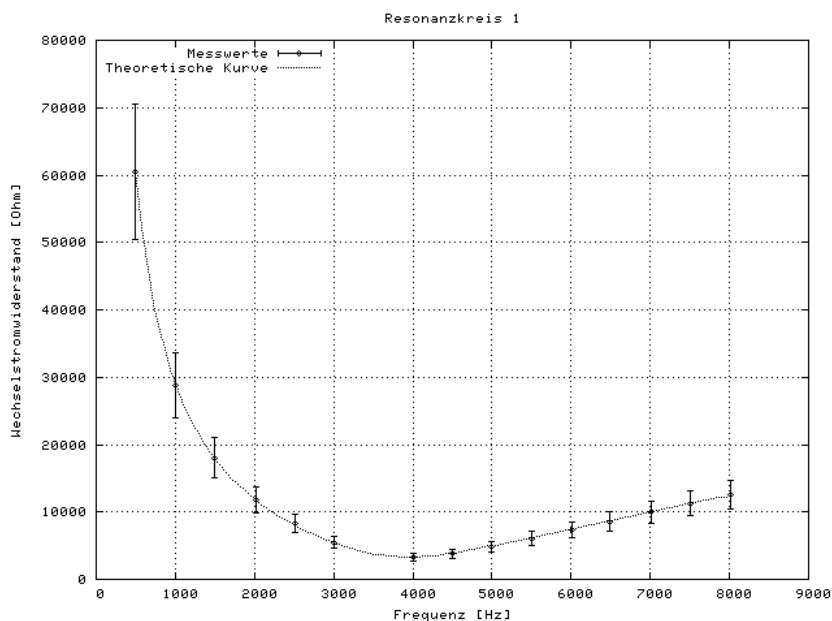


Abbildung 5: Impedanz in Abhängigkeit der Frequenz (Serienschwingkreis)

2.3 Parallelkreis 1. Ordnung

Der theoretische Wert der Resonanzfrequenz ist wiederum

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{LC} \cdot 2\pi} = 3946\text{Hz} \tag{49}$$

Unsere Messwerte ergaben folgende Abhängigkeiten des Phasenwinkels und der Impedanz von der Frequenz:

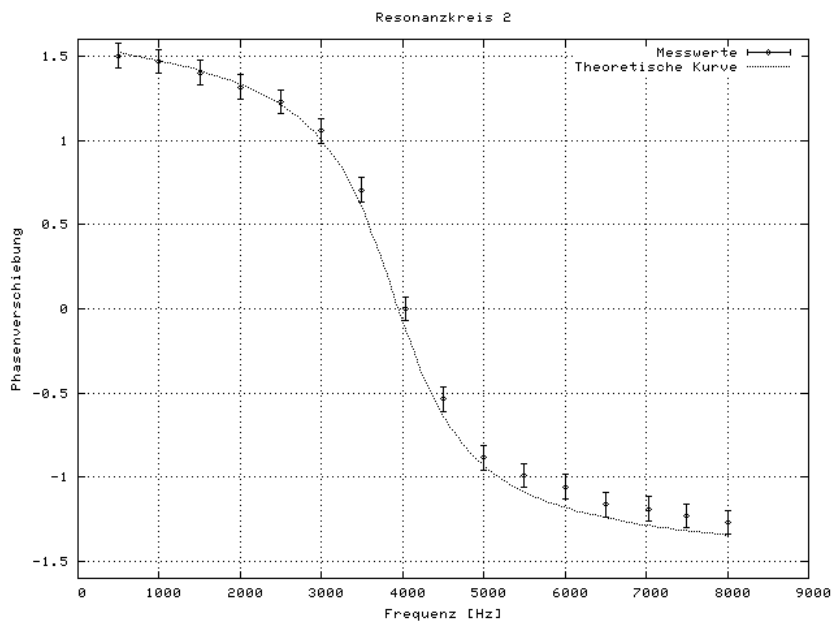


Abbildung 6: Phasenwinkel in Abhängigkeit der Frequenz (Parallelkreis 1. Ordnung)

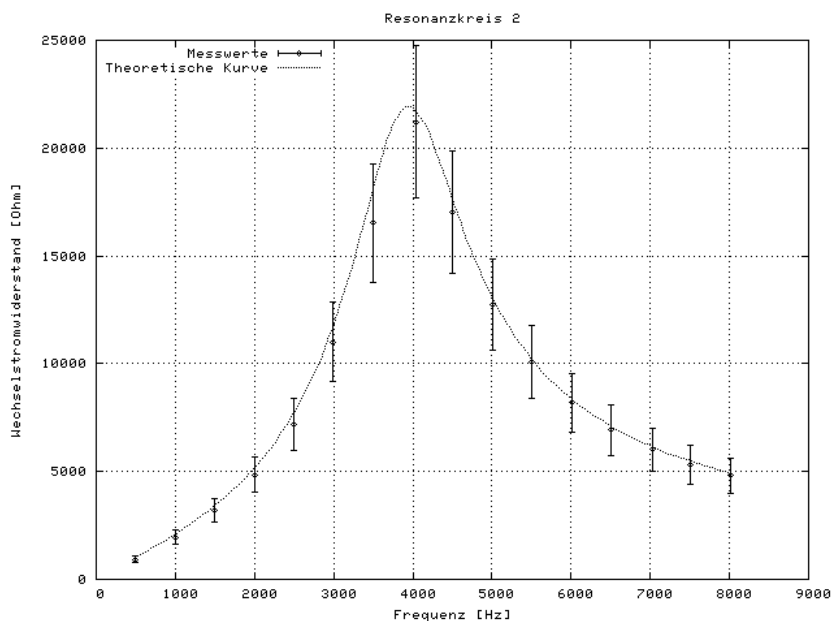


Abbildung 7: Impedanz in Abhängigkeit der Frequenz (Parallelkreis 1. Ordnung)

2.4 Parallelkreis 2. Ordnung

Der theoretische Wert der Resonanzfrequenz ist nun

$$f_2 = \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\pi} = 3875\text{Hz} \tag{50}$$

Unsere Messwerte ergaben folgende Abhängigkeiten des Phasenwinkels und der Impedanz von der Frequenz:

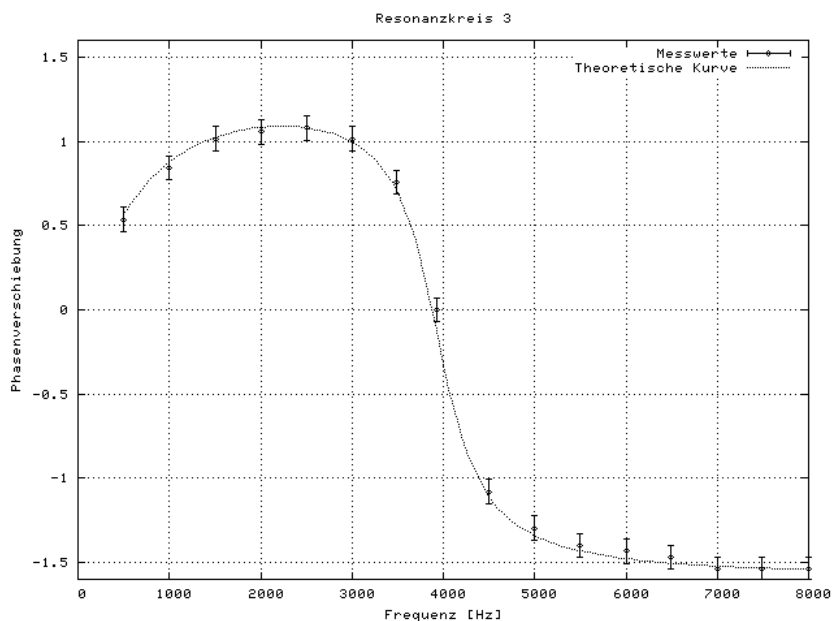


Abbildung 8: Phasenwinkel in Abhängigkeit der Frequenz (Parallelkreis 2. Ordnung)

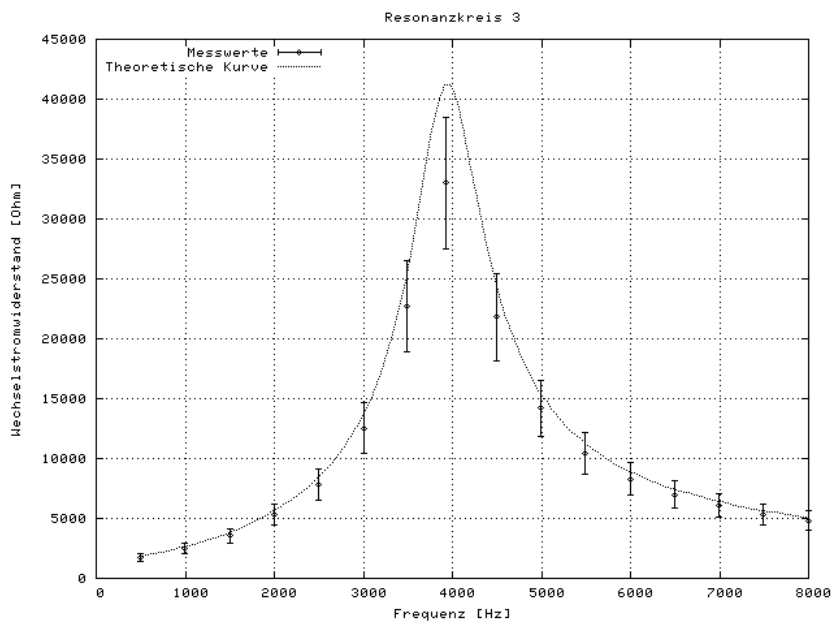


Abbildung 9: Impedanz in Abhängigkeit der Frequenz (Parallelkreis 2. Ordnung)

Anhang - Original Messdaten

$$C = 5.166 \text{ nF}$$

$$L = 0.3148 \text{ H}$$

$$R_L = 14.76 \text{ } \Omega$$

Serienschwingkreis

$$R = 3.303 \text{ k}\Omega$$

Frequenz [Hz]	R [Ohm]	a [cm]	b [cm]	p_x [V/cm]	p_y [V/cm]
500.4	6050	-2.8	3.2	0.05	0.005
1006	5750	-2.8	3.2	0.05	0.01
1499	7200	-2.6	3.3	0.05	0.02
2028	4700	-2.5	3.4	0.05	0.02
2506	3300	-2.2	3.5	0.05	0.02
3003	2200	-1.8	3.7	0.05	0.02
4013	1300	0	4.3	0.05	0.02
4500	1520	1	4	0.05	0.02
4998	1910	1.5	3.7	0.05	0.02
5509	2420	1.9	3.7	0.05	0.02
6007	2930	2.2	3.6	0.05	0.02
6492	3430	2.3	3.5	0.05	0.02
7008	4000	2.4	3.4	0.05	0.02
7501	4500	2.5	3.3	0.05	0.02
8008	5040	2.55	3.3	0.05	0.02

Parallelkreis 1.Ordnung

$$R = 21.94 \text{ k}\Omega$$

Frequenz [Hz]	R [Ohm]	a [cm]	b [cm]	p_x [V/cm]	p_y [V/cm]
8007	4810	-2.5	3.4	0.05	0.05
7498	5320	-2.4	3.4	0.05	0.05
7030	6020	-2.3	3.4	0.05	0.05
6499	6920	-2.3	3.5	0.05	0.05
6003	8200	-2.1	3.6	0.05	0.05
5498	10080	-2.0	3.7	0.05	0.05
5004	5100	-1.8	3.8	0.05	0.02
4501	6820	-1.1	4.0	0.05	0.02
4037	10600	0	4.3	0.01	0.005
3490	8260	1.4	3.8	0.01	0.005
2995	5500	2.1	3.6	0.01	0.005
2499	3600	2.4	3.4	0.01	0.005
2004	2420	2.55	3.3	0.01	0.005
1502	1600	2.7	3.2	0.01	0.005
1000	980	2.8	3.1	0.01	0.005
500	460	2.8	3.0	0.01	0.005

Parallelkreis 2.Ordnung $R = 1.485 \text{ k}\Omega$

Frequenz [Hz]	R [Ohm]	a [cm]	b [cm]	p_x [V/cm]	p_y [V/cm]
500	880	1.1	4.0	0.01	0.005
999	1270	1.7	3.8	0.01	0.005
1505	1790	2.0	3.6	0.01	0.005
2004	2650	2.1	3.6	0.01	0.005
2500	3900	2.1	3.5	0.01	0.005
3007	6270	2.0	3.6	0.01	0.005
3484	2270	1.6	4	0.05	0.005
3922	3300	0	4.3	0.05	0.005
4498	2180	-2.1	3.5	0.1	0.01
4997	1420	-2.5	3.3	0.1	0.01
5492	1040	-2.65	3.15	0.1	0.01
6005	830	-2.7	3.1	0.1	0.01
6498	700	-2.8	3.1	0.1	0.01
6998	610	-2.9	3.0	0.1	0.01
7490	530	-2.9	3.0	0.1	0.01
7999	480	-2.9	3.0	0.1	0.01