

Praktikum I BL

Brennweite von Linsen

Hanno Rein, Florian Jessen

Betreuer: Gunnar Ritt

15. Januar 2004

1 Motivation

Linsen spielen in unserem alltäglichen Leben eine große Rolle. Ohne sie wäre es uns nicht möglich unsere Umgebung in all den Details wahrzunehmen, wie wir es gewohnt sind. Man merkt dies spätestens, wenn die Sehkraft nachlässt und der Fehler durch zusätzliche Linsen ausgeglichen wird. Leider haben auch Linsen Eigenschaften, die in vielen Fällen unerwünscht sind. Auch diese sollen in diesem Versuch untersucht werden.

2 Physikalische Grundlagen

2.1 Snellius'sches Brechungsgesetz und Linsengleichung

Das Snellius'sche Brechungsgesetz lautet bekanntermaßen

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \quad (1)$$

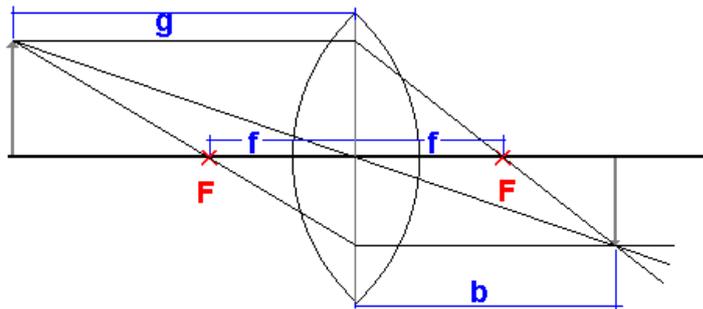
Damit lässt sich auch die Brechung an krummen Flächen beschreiben. Besonders interessant sind Linsen mit kugelförmigen Oberflächen, da diese leicht als Rotationskörper geschliffen werden können. Aus geometrischen Überlegungen erhält man die Linsengleichung in guter Näherung zu

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (2)$$

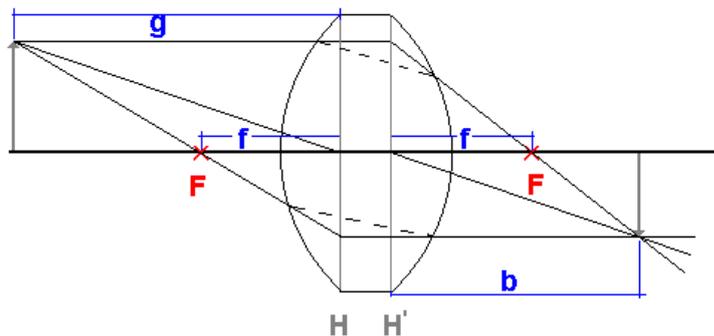
Wobei g die Gegenstandsweite, b die Bildweite und f die Brennweite ist. Der Brennpunkt ist als derjenige Punkt definiert, in dem alle parallel zur optischen Achse einfallenden Strahlen vereinigt werden. Werden mehrere Linsen hintereinander durchlaufen, so ergibt sich die effektive Brennweite durch

$$\frac{1}{f_{eff}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (3)$$

Hierbei ist d der Abstand der beiden Linsen zueinander. Bei dünnen Linsen lässt sich das Bild eines Gegenstandes, das durch diese erzeugt wird, einfach konstruieren. Dazu verwendet man drei charakteristische Strahlen. Diese sind zum einen der Strahl, der parallel zur optischen Achse verläuft, zum anderen der Strahl durch den vorderen Brennpunkt und der Zentralstrahl.



Bei dicken Linsen sind die sogenannten Hauptebenen zu berücksichtigen. Man erhält diese, indem man den einfallenden und den ausfallenden Strahl bis zu deren Schnittpunkt verlängert. Ausgehend von diesem Punkt fällt man das Lot auf die optische Achse. Der Schnittpunkt mit dieser wird als Hauptpunkt bezeichnet und kennzeichnet die Lage einer Hauptebene H . Es gibt dabei immer zwei Hauptebenen. Der Verlauf der Strahlen lässt sich nun wieder einfach konstruieren. Dieses ist hier skizziert



Misst man Bild-, Gegenstands- und Brennweite bis zur nächstgelegenen Hauptebene, so gilt auch hier die Linsengleichung (2).

2.2 Besselverfahren zur Bestimmung der Brennweiten dicker Linsen

Da die Lage der Hauptebenen bei dicken Linsen nicht durch Anlegen eines Maßstabes gemessen werden kann, muss ein anderes Verfahren entwickelt werden. Für das Verfahren nach Bessel wird die Position festgestellt, in der die Linse ein Objekt scharf auf einen Schirm abbildet, wobei der Abstand Schirm - Objekt zuvor frei gewählt wurde. Da der Lichtweg grundsätzlich umkehrbar ist, gibt es eine weitere Position, in der wieder eine scharfe Abbildung erzeugt wird. Durch geometrische Überlegungen erhält man nun aus dem Abstand a der beiden Positionen und dem Abstand e von Schirm und Objekt die Brennweite nach folgender Beziehung in guter Näherung

$$f = \frac{1}{4} \left(e - \frac{a^2}{e} \right) \quad (4)$$

Um die Näherung durchführen zu können muss dabei der Abstand der Hauptebenen gegenüber e verschwinden.

2.3 Brechkraft

Die Brechkraft D einer Fläche ist definiert durch

$$D = \frac{\Delta n}{r} = \frac{1}{f} \quad (5)$$

Werden vom Licht mehrere Flächen hintereinander durchlaufen, so sind die Brechkräfte zu addieren. Für eine Linse mit den Krümmungsradien r_1, r_2 und die Brechungsindizes n_1, n_2, n_3 der hintereinander durchlaufenen Medien gilt dann allgemein nach der Linsengleichung (2)

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_3}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} \quad (6)$$

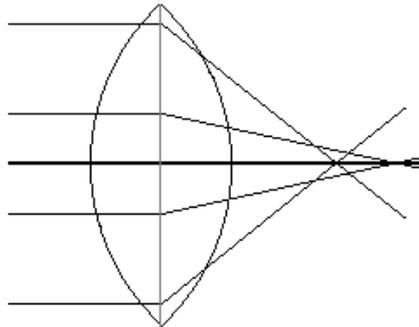
Setzt man bei einer dünnen Linse $n_1 = n_3$ und $n_2 = n$ voraus, so kann man den Ausdruck vereinfachen zu

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (7)$$

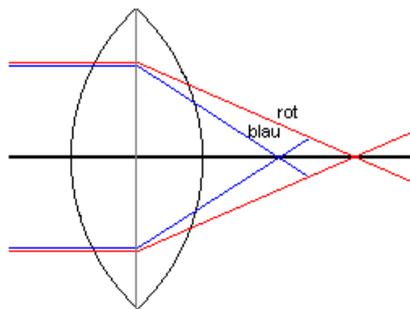
Das Minuszeichen wird dadurch bedingt, dass der Brechungsindex beim Austritt aus dem Medium abnimmt.

2.4 sphärische und chromatische Aberration

Bei Linsen treten in aller Regel besonders zwei Abbildungsfehler auf. Dies sind die sphärische und die chromatische Aberration. Die sphärische Aberration wird durch die Form bedingt. Da die Linsen meist als Kugelflächen geschliffen werden, fallen die Brennpunkte der Randstrahlen und der Zentralstrahlen nicht zusammen. Bei anderen speziellen Formen tritt dieser Effekt nicht auf, jedoch sind diese in der Herstellung auch wesentlich aufwendiger.

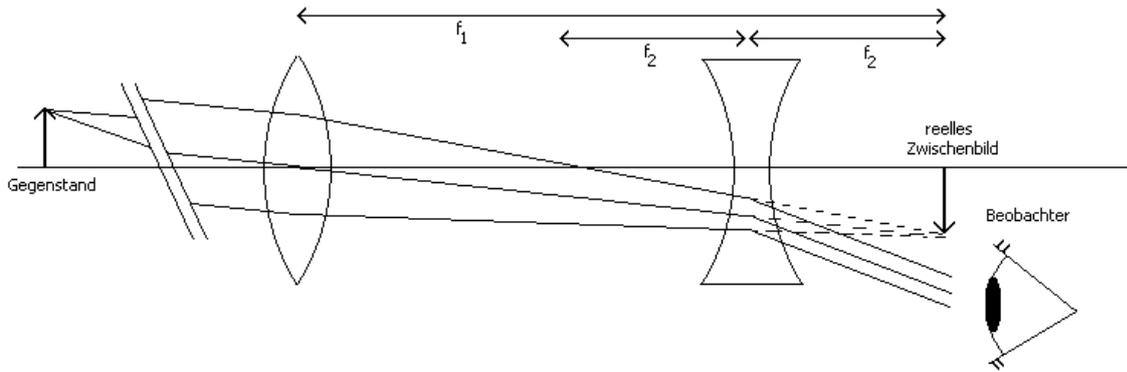


Die chromatische Aberration tritt auf, da der Brechungsindex von der Wellenlänge des Lichts abhängt. Dieser Effekt wird im Prisma ausgenutzt, um die verschiedenen Farben zu trennen, führt aber auch zu Farbändern. Man kann diese Fehler kompensieren, wenn man mehrere Linsen hintereinanderstellt.

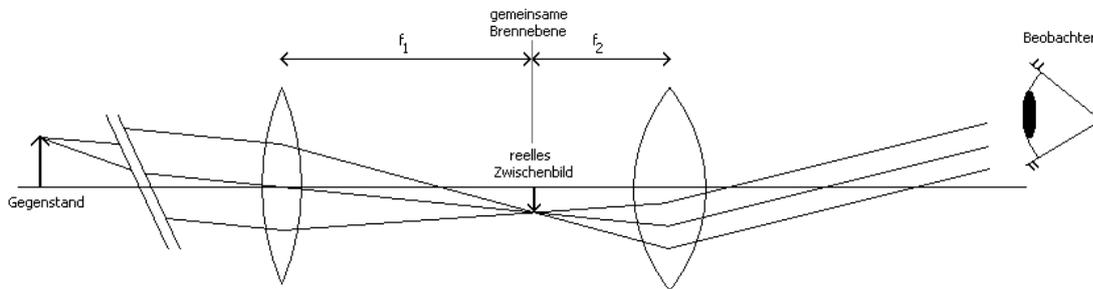


2.5 Galilei Fernrohr und Astronomisches Fernrohr

Beim Galilei Fernrohr wird eine langbrennweitige Sammellinse mit einer kurzbrennweitigen Zerstreuungslinse kombiniert. Die Sammellinse erzeugt ein reelles Zwischenbild. Zwischen diesem und der Linse befindet sich jedoch die Streulinse, die dafür sorgt, dass die Strahlen das Fernrohr wieder parallel verlassen. Dazu müssen die Brennpunkte der beiden Linsen zusammenfallen. Man kann nun das gewünschte Objekt in gewohnter Orientierung beobachten.



Beim Astronomischen Fernrohr, auch Kepler Fernrohr genannt, werden dagegen zwei Sammellinsen verwendet. Die erste erzeugt ein reelles Zwischenbild in der Brennebene, das durch die zweite Linse, die Okularlinse, vergrößert betrachtet wird. Die Nachteile des Kepler Fernrohres gegenüber dem Galilei Fernrohr liegen darin, dass das Bild auf dem Kopf steht und die Länge wesentlich größer ist. Dies ist zwar unangenehm bei terrestrischen Beobachtungen, spielt aber in der Astronomie keine Rolle.



3 Durchführung

In dem vorliegenden Versuchen wird zunächst die Brennweite von einer Linse durch Messung von Gegenstands- und Bildweite ermittelt. Außerdem wird das Besselverfahren mehrmals angewandt, um die Brennweiten von Linsen und Linsensystemen zu bestimmen. Mit diesem Verfahren wird außerdem die sphärische Aberration einer Sammellinse bestimmt. Hierzu werden einmal die Zentralstrahlen und einmal die Randstrahlen durch entsprechende Blenden abgedunkelt und jeweils die Brennweite bestimmt.

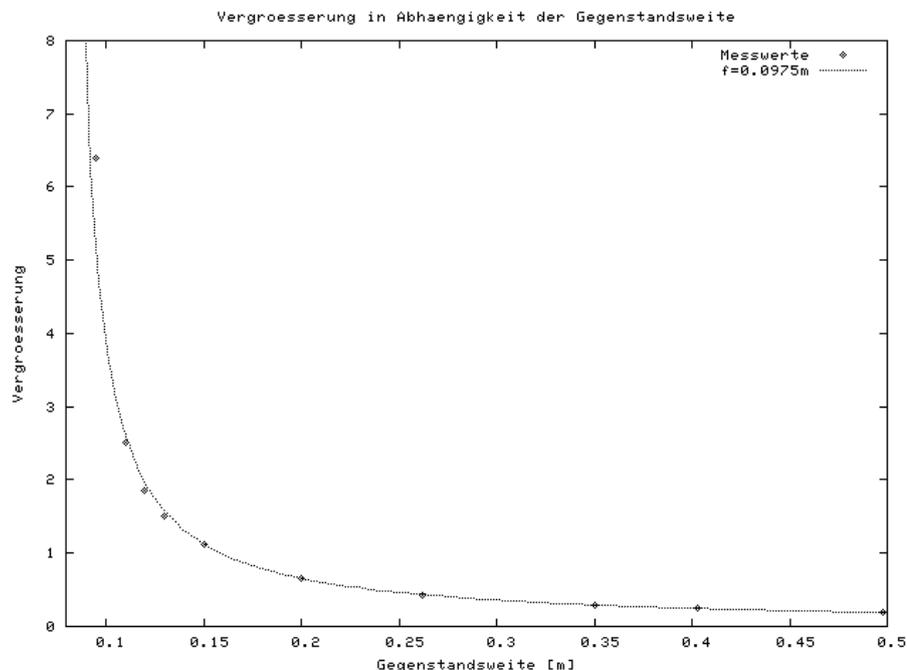
4 Auswertung

4.1 Brechkraft und Brennweite der kleinen Sammellinse

Aus (2) ergibt sich nach unseren Messungen für die Brennweite, sowie die Brechkraft der kleinen Sammellinse:

$$f_0 = (7.97 \pm 0.02) \cdot 10^{-2} \text{m}$$
$$D_0 = (12.55 \pm 0.04) \text{m}^{-1}$$

Das folgende Schaubild zeigt den Zusammenhang zwischen Gegenstandsweite und Vergrößerung.



4.2 Brechkraft und Brennweite nach der Methode von Bessel

4.2.1 Große Sammellinse / Linsenkombination

Nach der Methode von Bessel ergeben sich folgende Werte:

Sammellinse	Linsenkombination
$f_3 = (0.142 \pm 0.000) \text{ m}$	$f_4 = (0.1832 \pm 0.0002) \text{ m}$
$D_3 = (7.043 \pm 0.003) \text{ m}^{-1}$	$D_4 = (5.458 \pm 0.006) \text{ m}^{-1}$

4.2.2 Zerstreuungslinse

Bei der Messung wurde der Abstand der beiden Linsen zueinander nicht gemessen. Da in der Linsenkomination jedoch beide Linsen nahe beieinander stehen gilt für die Brechzahl f_5 der Zerstreuungslinse nach (3) näherungsweise:

$$\frac{1}{f_5} = D_5 = \frac{1}{f_4} - \frac{1}{f_3} \quad (8)$$

$$= D_4 - D_3 \quad (9)$$

$$= (-1.58 \pm 0.01) \text{ m}^{-1} \quad (10)$$

Nach der Gausschen Fehlerfortpflanzung ergibt sich

$$\sigma_{f_5} = \left| \frac{1}{(\bar{D}_5)^2} \cdot \sigma_{D_5} \right| \quad (11)$$

und somit ist

$$f_5 = (-0.631 \pm 0.004) \text{ m} \quad (12)$$

4.3 Sphärische Aberration

Die Brennweite ist jeweils

Randstrahlen	Zentralstrahlen
$f_6 = (9.78 \pm 0.02) \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$f_7 = (10.218 \pm 0.004) \cdot 10^{-2} \text{ m}$

Somit ist die sphärische Aberration δ :

$$\delta = f_6 - f_7 \quad (13)$$

$$= (-4.39 \pm 0.59) \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (14)$$